Strojové dokazování v predikátové logice

- velká vyjadřovací pro reprezentaci znalostí
- výpočetně náročnější, často se používá jen její část

Příklad:**Wumpus World**

Úmluva: a, b, c, d jsou konstanty, x, y, z proměnné
f, g funkce, p, q predikáty

U díry táhne

$\forall y\ (breezy(y) \Leftrightarrow \exists x[pit(x)\&adjacent(x, y)])$

Wumpus smrdí

$\forall y\ (smelly(y) \Leftrightarrow \exists x[wumpus(x)\&adjacent(x, y)])$

Jeden Wumpus

$\forall x, y\ (wumpus(x)\&wumpus(y) \Leftrightarrow x = y)$

Sousední (trochu problém)

$adjacent([1, 1], [1, 2])\& \ldots$

Fakta

$smelly([1, 2])\&\neg smelly([2, 1])\&\neg breezy([1, 2])\&breezy([2, 1])$

Alternativní báze

dva **funkční symboly**, r, u (right, up), počáteční pozice a

Sousední

$adjacent(r(x), x) \& adjacent(u(x), x) \& adjacent(x, r(x)) \& adjacent(x, u(x)$

Fakta

$smelly(u(a)) \& \neg smelly(r(a)) \& breezy(r(a)) \& \neg breezy(u(a))$

Standardní skolemovská forma formule

1. převedeme formuli na prenexní tvar (ekvivalentní formule)
2. vnitřek formule převedeme na konjunktivní normální formu (ekvivalentní formule)
3. existenční kvantifikátory nahradíme **Skolemovskými** funkcemi **(stejná splnitelnost)**

Množina klauzulí

- zbyly jen univerzální kvantifikátory; vynecháme je a budeme považovat všechny proměnné za univerzálně kvantifikované
- vynechámím znaků & převedeme formuli na množinu klauzulí

Definition

Množinu klauzulí chápeme jako konjunkci všech klauzulí v S, **kde každá proměnná v** S **je vázána velkým kvantifikátorem**.

Normální tvar – příklad

Formule

$\forall y\ (breezy(y) \Leftrightarrow \exists x[pit(x)\&adjacent(x,y)])$

prenexní tvar

$\forall y \exists x \forall z\ ([breezy(y) \Rightarrow$
$pit(x)\&adjacent(x,y)]\&[pit(z)\&adjacent(z,y) \Rightarrow breezy(y)])$

KNF

$\forall y \exists x \forall z\ ([\neg breezy(y) \vee pit(x)]\&[\neg breezy(y) \vee$
$adjacent(x,y)]\&[breezy(y) \vee \neg pit(z) \vee \neg adjacent(z,y)])$

Skolemovská varianta

$\forall y \forall z\ ([\neg breezy(y) \vee pit(\mathbf{f(y)})]\&[\neg breezy(y) \vee$
$adjacent(\mathbf{f(y)},y)]\&[breezy(y) \vee \neg pit(z) \vee \neg adjacent(z,y)])$

Klauzule

$\{[\neg breezy(y) \vee pit(f(y))], [\neg breezy(y) \vee$
$adjacent(f(y),y)], [breezy(y) \vee \neg pit(z) \vee \neg adjacent(z,y)]\}$

Skolemovská forma

Nelze tvrdit: Skolemovská forma formule F je pravdivá právě když je formule F pravdivá.
Příklad Wumpus, formule $\exists x \ breezy(x)$
skolemovská forma $breezy(f)$.

Theorem

Skolemovská forma formule F je **splnitelná** *právě když je původní formule F splnitelná.*

Theorem

Nechť S je množina klauzulí vzniklá převodem formule F do normálního tvaru. Potom F je nesplnitelná právě když S je nesplnitelná.

Jak odvodit $Q \equiv wumpus([1,3])$?

	z logiky	organizovaněji
sémanticky	projít všechny realizace (∞)	sémantický strom
syntakticky	z axiomů PL a MP, **Gen**	rezolucí

Snažíme se dokázat spornost báze znalostí a negace dotazu $KB \cup \{\neg Q\}$, tj. nesplnitelnost této množiny.

Realizace, model

Definition (Realizace)

Realizace sestává z:

množiny M zvané báze		
realizace funkčních symbolů	$f(x_1, \ldots, x_k)$	zobrazení $M^k \longrightarrow M$
realizace predikátů	$p(x_1, \ldots, x_l)$	$M^l \longrightarrow \{true, false\}$

Definition (Model)

Realizace je **model** teorie S (tj. KB^+), pokud jsou v této realizaci pravdivé všechny formule S pro všechna ohodnocení volných proměnných (resp. volné proměnné považujeme za univerzálně kvantifikované).

Motivace

Prozkoušet všechny báze a realizace by bylo dost obtížné. Stačí prozkoušet Herbrandovu bázi s jasnou realizací funkčních symbolů; zbydou nám k prozkošení různé realizace predikátů.

Herbrandovo univerzum H_S

Definition (Herbrandovo univerzum H_S)

Nechť H_0 je množina všech konstant objevujících se v S; neobsahuje-li S žádnou konstantu, zvolíme nějakou a a položíme $H_0 = \{a\}$. Pro $i = 0, 1, 2, \ldots$ položíme H_{i+1} jako sjednocení H_i a množiny všech termů $f^n(t_1, \ldots, t_n)$, kde f^n je funkční symbol z S a $t_1, \ldots, t_n \in H_i$. Položíme $H_S = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$.

Example

KB: $H = H_0 = \{[1,1], [1,2], \ldots, [3,3]\}$ (z KB)

z alternativní báze

$H_0 = \{a\}$

$H_1 = \{a, u(a), r(a)\}$

$H_2 = \{a, u(a), r(a), u(u(a)), r(u(a)), u(r(a)), r(r(a))\}$

$H = \{a, u(a), r(a), \ldots, u(r(u(u(u(r(u(a))))))), \ldots\}$

Příklady

Example (1)

$S = \{p(a), \neg p(x) \vee p(f(x))\}$.
$H_0 = \{a\}, H_1 = \{a, f(a)\}, H_2 = \{a, f(a), f(f(a))\}, \dots,$
$H_S = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$

Example (2)

$S = \{p(x) \vee q(x), r(z), t(z) \vee \neg w(y)\}$.
$H_1 = H_2 = \dots = \{a\}$.

Example (3)

$S = \{p(f(x), a, g(z), b)\}$.
$H_0 = \{a, b\}, H_1 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\},$
$H_2 =$
$\{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), f(b(a)), f(g(b)),$
$g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)), \dots\}$.

H-realizace S, Herbrandova báze pro S

Definition (H-realizace S)

Nechť H_S je Herbrandovo univerzum množiny S. I je **H-realizace množiny** S , jestliže je to realizace s definičním oborem H_S a

- I přiřazuje všem konstantám z S je samé
- je-li f^n funkční symbol z S, pak je f^n realizována funkcí, která n-tici $\langle h_1, \ldots, h_n \rangle \in H_S^n$ přiřazuje $f^n(h_1, \ldots, h_n)$, což je jeden zcela určitý prvek H_S, viz konstrukce H_S.

Definition (Herbrandova báze pro S)

Množina A_S všech základních atomických formulí $p^n(t_1, \ldots, t_n)$, kde p^n je predikátový symbol z S a $t_1, \ldots, t_n \in H_S$ se nazývá **Herbrandova báze pro** S.

Herbrandova báze pro S, H-realizace S

K zadání konkrétní H-realizace I je tedy třeba realizovat predikátové symboly z S. Je-li $A_S = \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ Herbrandova báze množiny S, můžeme I repezentovat jako $\{L_1, \ldots, L_n, \ldots\}$, kde L_i je buď A_i nebo $\neg A_i$ (tj. každý pedikátový symbol z S popsat jeho charakteristickou funkcí).

Example

$S = \{p(x) \vee q(x), r(f(h))\}$.
$H_S = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
$A_S = \{p(a), q(a), r(a), p(f(a)), q(f(a)), r(f(a)), \ldots\}$
H-realizace jsou například:
$I_1 = \{p(a), q(a), r(a), p(f(a)), q(f(a)), r(f(a)), \ldots\}$
$I_2 = \{\neg p(a), \neg q(a), \neg r(a), \neg p(f(a)), \neg q(f(a)), \neg r(f(a)), \ldots\}$
$I_3 = \{\neg p(a), q(a), \neg r(a), p(f(a)), q(f(a)), \neg r(f(a)), \ldots\}$.

Definition

Nechť I je realizace s definičním oborem M, I^* H-realizace. Řekneme, že I^* je asociovaná s I, jestliže existuje zobrazení $F : H_S \rightarrow M$ takové, že pro každý predikát p^n a $h_1, \ldots, h_n \in H_S$, platí: je–li $p^n(F(h_1), \ldots, F(h_n))$ je true resp. false v I, potom $p^n(h_1, \ldots, h_n)$ je true resp. false v I^*.

Lemma

Jestliže množina klauzulí S je splněna v realizaci I, pak je splněna v každé H–realizaci I^* asociované s I.

Ohodnocení na základních atomech je stejné, proto je stejné i na atomech spojených log. spojkami atd.

Theorem

Množina klauzulí S je nesplnitelná právě když S není splněna v žádné H–realizaci.

Je-li pravdivá v nějaké realizaci, je pravdivá i ve všech asociovaných H–realizacích a aspoň jedna asociovaná H–realizace existuje.

Example (Konstrukce asociované H–realizace)

Nechť například $S = \{p(x), q(y, f(y, a))\}$ a nechť I je dána takto: $M = \{1, 2\}$, a

a	f(1,1)	f(1,2)	f(2,1)	f(2,2)	
2	1	2	2	1	
p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
true	false	false	true	false	true

Herbrandova báze pro S je $A_S =$
$\{p(a), q(a, a), p(f(a, a)), q(a, f(a, a)), q(f(a, a), a), q(f(a, a), f(a, a)), \ldots\}$

a 2	f(1,1) 1	f(1,2) 2	f(2,1) 2	f(2,2) 1	
p(1) true	p(2) false	q(1,1) false	q(1,2) true	q(2,1) false	q(2,2) true

Nyní ohodnotíme prvky A_S v souhlase s I:

$$
\begin{aligned}
p(a) = p(2) &= \mathit{false} \\
q(a,a) = q(2,2) &= \mathit{true} \\
p(f(a,a)) = p(f(2,2)) = p(1) &= \mathit{true} \\
q(a, f(a,a)) = q(2, f(2,2)) = q(2,1) &= \mathit{false} \\
q(f(a,a), a) = q(f(2,2), 2) = q(1,2) &= \mathit{true} \\
q(f(a,a), f(a,a)) = q(f(2,2), f(2,2)) = q(1,1) &= \mathit{false} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$I^* = \{\neg p(a), q(a,a), p(f(a,a)), \neg q(a, f(a,a)), q(f(a,a), a), \ldots\}.$$

Více asociovaných H–realizací

Jestliže S neobsahuje žádnou konstantu, pak symbol a, užitý při vytváření Herbrandova univerza, můžeme zobrazit na libovolný prvek definičního oboru M realizace I (má-li tedy M více než jeden prvek, dostaneme více než jednu H-realizaci asociovanou s I).
Je-li např. $S = \{p(x), q(y, f(y, z))\}$ a I jako výše, dostaneme pro zobrazení $a \rightarrow 2$ stejnou asociovanou H-realizaci jako výše, zatímco pro zobrazení $a \rightarrow 1$ dostaneme H-realizaci asociovanou s I

$$I^* = \{p(a), \neg q(a, a), p(f(a, a)), \neg q(a, f(a, a), \neg q(f(a, a), a), \ldots\}.$$

Definition ((jednoduchý) sémantický strom pro S, částečná realizace)

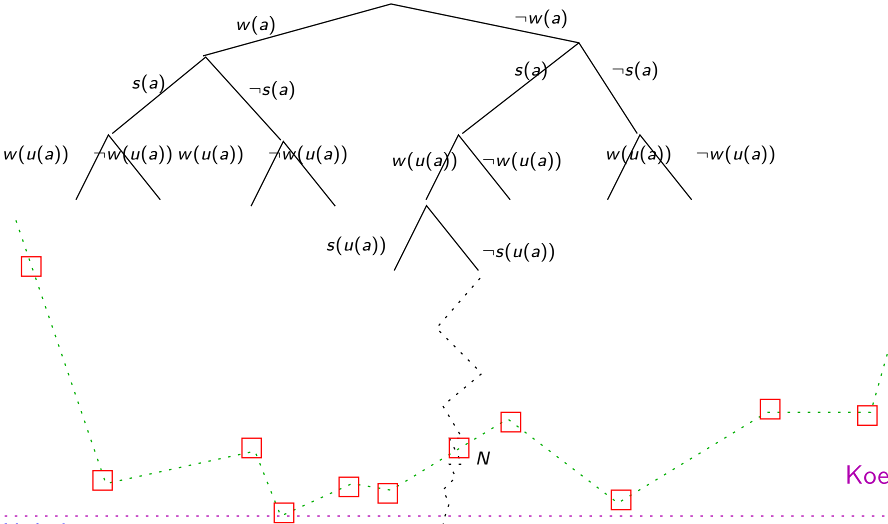
Nechť S je množina klauzulí, A_S Herbrandova báze pro S. Sémantický strom pro S je kořenový binární strom T, kde:

- z každého uzlu N vycházejí dvě hrany označené komplementárními atomické formule z A_S (tj. L a $\neg L$)
- pro každý uzel N označme $I(N)$ sjednocení všech množin, které ohodnocují hrany cesty z kořene do N, pak $I(N)$ neobsahuje žádnou komplementární dvojici.

$I(N)$ nazýváme částečná realizace.

Tentokrát je sémantický strom často nekonečný!

Sémantický strom



Uplný strom

donekonečna

bud S splnitelná v $I(B)$, nebo ex. uzel selhání.

$I(B)$

Obdoba definic z minule

Definition (Úplný sémantický strom)

Nechť A_S je Herbrandova báze pro S. Sémantický strom pro S je úplný, jestliže pro každý jeho list N množina $I(N)$ obsahuje A_i nebo $\neg A_i$ pro každé $A_i \in A_S$.

Definition (Uzel selhání)

Uzel N je uzel selhání, jestliže existuje nějaká klauzule z S, která je nepravdivá v $I(N)$ a současně žádná klauzule z S není nepravdivá v žádné $I(N^|)$, kde $N^|$ je předchůdce uzlu N.

Definition (Uzavřený sémantický podstrom)

Podstrom T sémantického stromu je uzavřený, jestliže list každé větve T je uzel selhání.

Lemma (Koenigovo lemma)

Je-li T strom s konečným větvením obsahující nekonečně mnoho vrcholů, potom v T existuje větev nekonečné délky.

Theorem (Herbrandova věta, verze I)

Množina klauzulí S je nesplnitelná právě když ke každému úplnému sémantickému stromu pro S existuje **konečný** *uzavřený podstrom se stejným kořenem.*

S nesplnitelná $\Rightarrow$ S nepravdivá v $I(B)$ pro každou větev B, $\Rightarrow$ ex. $C \in S$, základní instance $C^{|}$ nepravdivá v $I(B)$.
$C^{|}$ konečná disjunkce, strom úplný, proto po konečném počtu hran z kořene dorazím do uzlu selhání.

Definition

Term, literál, klauzuli neobsahující žádnou proměnnou nazveme **základní term, literál, klauzule**.

Theorem (Herbrandova věta, verze II)

Množina klauzulí S je nesplnitelná, právě když existuje konečná nesplnitelná množina $S^|$ základních instancí klauzulí z S.

Důkaz

$\Longrightarrow$ Nechť S je nesplnitelná, T strom, z I existuje konečný uzavřený podstrom. Označme $S^|$ množinu základních klauzulí, které jsou nepravdivé v některé z částečných realizací odpovídajících stromu $T^|$. $S^|$ je nepravdivá v každé realizaci, proto je S nesplnitelná.

$\Longleftarrow$ Každá realizace I množiny S obsahuje realizaci $I^|$ množiny $S^|$.

Příklad

$S = \{p(x), \neg p(f(a))\}$
S nesplnitelná, $S^{|}$ např. $S^{|} = \{p(f(a)), \neg p(f(a))\}$

$S = \{\neg p(x) \vee q(f(x), x), p(g(b)), \neg q(y, z)\}$
S nesplnitelná, $S^{|}$ např.$S^{|} =$
$\{\neg p(g(b)) \vee q(f(g(b)), g(b)), p(g(b)), \neg q(f(g(b)), g(b))\}$

Užití Herbrandovy věty

Mějme nesplnitelnou množinu klauzulí S. Jestliže existuje efektivní procedura, která generuje postupně množiny $S^{|}_0, S^{|}_1, \ldots, S^{|}_n, \ldots$ základních instancí klauzulí z S a testuje jejich nesplnitelnost, potom Herbrandova věta verze II zaručuje, že tato procedura najde (konečné) N takové, že $S^{|}_N$ je nesplnitelná.
Gilmore (1960) sestavil program, který postupně generoval množiny $S^{|}_0, S^{|}_1, \ldots, S^{|}_n, \ldots$, kde $S^{|}_i$ je množina všech základních instancí, vzniklých nahrazením proměnných obsažených v S prvky množiny H_i (tj. konstantami i-tého stupně vznikými při vytváření Herbrandova univerza). Každé $S^{|}_i$ je konjunkce základních klauzulí, její nesplnitelnost lze tedy testovat pomocí libovolné metody, užívané pro tento účel ve výrokovém počtu. Gilmore užil tzv. multiplikativní metodu, tj. převod $S^{|}_i$ na disjunktivní normální tvar. Každý disjunkt (tj. konjunkce) obsahující komplementární dvojici se škrtne (je nesplnitelný), je-li nějaká $S^{|}_i$ po tomto škrtání prázdná, je nesplnitelná.

Základní rezoluce (rezoluce bez proměnných)

Definition

Nechť $A \vee L$ a $\neg L \vee B$ jsou **základní klauzule**. Pravidlo **základní rezoluce** z nich odvodí klauzuli $A \vee B$.

základní rezoluce $$\frac{A \vee L \qquad\qquad \neg L \vee B}{A \vee B}$$

například $$\frac{\neg wumpus([1,3]) \vee smelly([1,2]) \qquad\qquad \neg smelly([1,2])}{\neg wumpus([1,3])}$$

Formule $(A \vee B)$ se nazývá **rezolventa** formulí $(A \vee L)$ a $(\neg L \vee B)$. Literály L a $\neg L$ se nazývají doplňkové literály.

Ale co s proměnnými?

$\neg wumpus(\mathbf{x}) \vee \neg adjacent(\mathbf{x,y}) \vee smelly(\mathbf{y}) \qquad \neg smelly([1,2])$