# Motivace

- Predikátová logika neodpoví, pokud si není jista
- člověk si to často nemůže dovolit
  - **Většina** lidí na UK mluví česky.
  - ovšem ne cizinci, atd.
- pokud se nějaký předpoklad ukáže nepravdivý, vyloučíme ho z aktuálního usuzování, a pouštíme se do tzv. **nemonotónního usuzování**.

# Klasická logika

- Chceme do logiky přidat tvrzení **typicky** $A$ s významem, že $A$ je pravdivé kromě vyjímečných situací.
- Např. "na UK se mluví česky"

$$\forall x \ typicky(uk(x) \rightarrow cesky(x))$$

- to nám ale nepoví, jak detekovat vyjímečnou situaci
- přidání negace známých vyjímek moc nepomůže

$$\forall x \ uk(x) \& \neg cizinec(x) \& \neg (hluchy(x) \ldots) \rightarrow cesky(x)$$

1. s každou novou vyjímkou musíme modifikovat pravidlo, takže bude velice dlouhé
2. dokud nedokážeme negaci všech vyjímek, tak nejsme schopni odvodit důsledek
   **tj. nezačnu mluvit česky, dokud nevyloučím, že jde o cizince, tj. mlčím**.

## Příklad:

1. V Čechách se mluví česky.
2. Slováci mluví slovensky.

BgKn Nelze mluvit česky a slovensky zároveň.

---

? Jakým jazykem mluví Slovák studující v Čechách?

# Příklad:

1. V Čechách se **(většinou)** mluví česky.
2. Slováci **(většinou)** mluví slovensky.

BgKn Nelze mluvit česky a slovensky zároveň.

3. Slováci v Čechách **(většinou)** mluví slovensky.

---

? Jakým jazykem mluví Slovák studující v Čechách?

# (Ne)monotónnost

Mějme bázi znalostí $KB$ a její podmnožinu $K \subset KB$. Nechť ze znalostí $K$ jsme schopni odvodit tvrzení $Q$.

- v **monotónním systému** (např. predikátová logika) máme zaručeno, že stejné tvrzení jsme schopni odvodit i ve větší bázi $KB$.
- V **nemonotónním systému** může nastat, že přidáním dalších znalostí $KB \setminus K$ přestane být možné odvodit tvrzení $Q$.

# Příklad:

1. V Čechách se **(většinou)** mluví česky.
2. Slováci **(většinou)** mluví slovensky.

BgKn Nelze mluvit česky a slovensky zároveň.

3. Slováci v Čechách **(většinou)** mluví slovensky.

---

4. Anna žije v Čechách.
5. Anna je Slovenka.

? Jakým jazykem mluví Anna?

### Definition (Teorie defaultů $\Delta = (W, D)$)

je dvojice $(W, D)$, kde $W$ je množina formulí predikátové logiky a $D$ je množina defaultů.

### Definition (Default)

Nechť $\alpha, \beta, \gamma$ jsou formule predikátové logiky, pak:

$$\frac{\alpha : \beta}{\gamma} \text{ psané též } (\alpha : \beta) \rightharpoonup \gamma$$

se nazývá default pravidlo.

**Úmluva:** Volné proměnné píšeme za $\alpha, \beta, \gamma$, tj. default s proměnnou $x$ bude vypadat:

$$\frac{\alpha(x) : \beta(x)}{\gamma(x)} \text{ nebo } (\alpha(x) : \beta(x)) \rightharpoonup \gamma(x)$$

# Příklad

$uk(X)$ značí člověka z Univerzity Karlovy, $slovak(x)$, $cesky(x)$ jestli si mluví česky.

**Jistá znalost**
$\mathcal{W} = \{uk(fero), slovak(fero), \neg(cesky(x) \& slovensky(x))\}$

**Defaulty**
$\mathcal{D} = \left\{ \frac{uk(x):cesky(x)}{cesky(x)}, \frac{slovak(x):slovensky(x)}{slovensky(x)} \right\}$

# Sémantika

## Definition (Default)

Nechť $\alpha, \beta, \gamma$ jsou formule predikátové logiky, pak:

$$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$$

se nazývá default pravidlo.

Tato definice znamená:
"Je–li $\alpha$ pravda a $\beta$ je **konzistentní** s tím, co je pravdivé, pak *můžeme* předpokládat pravdivost $\gamma$.

# Pojmy z klasické logiky

**Definition (Konzistence)**

$\beta$ je konzistentní s $\mathcal{S}$, pokud existuje interpretace, ve které je pravdivé $\beta$ i všechny formlule z $\mathcal{S}$. Ekvivalentně, $\beta$ je konzistentní s $\mathcal{S}$, pokud $\mathcal{S} \not\vdash (\neg\beta)$.

**Definition (Množina logických důsledků)**

Množina logických důsledků $\mathcal{S}$ je definována $Th(\mathcal{S}) = \{\alpha | \mathcal{S} \vdash \alpha\}$, tj. množinu všech formulí odvoditelných z $\mathcal{S}$ z axiomů a odvozovacích pravidel logiky.

# Srovnání $\rightarrow$ a $\rightharpoonup$

Pravidlo $(\alpha :) \rightharpoonup \gamma$ říká, že je–li $\alpha$ pravda, *můžeme* předpokládat $\gamma$ pravdivé.
Naproti tomu $\alpha \rightarrow \gamma$ říká, že je–li $\alpha$ pravdivé, pak je nutně pravdivé i $\gamma$.
Pravidlo $(: \beta) \rightharpoonup \gamma$ znamená: pokud je $\beta$ konzistentní s našimi doměnkami, pak *můžeme* předpokládat, že je $\gamma$ pravdivé.

# Sémantika

Naše doměnky jsou $\Delta = (\mathcal{W}, \mathcal{D})$, kde $\mathcal{W}$ je jistá znalost a $\mathcal{D}$ je znalost formulovaná jako defaultní pravidla.

**Co prohlásíme za pravdivé?**

- Určitě bychom měli věřit $\mathcal{W}$ a jejím důsledkům v predikátové logice.
- Můžeme věřit i tomu, co odvodíme pomocí default pravidla z $\mathcal{D}$.
  Čím víc, tím lépe, ale vyhnout se evidentnímu sporu.
- Neměli bychom věřit tomu, co nelze odvodit ani z $\mathcal{W}$, ani z $\mathcal{D}$, ani z kombinace obou.

# Sémantika – motivace, NESPRÁVNÁ definice extenze

Mějme defaultní teorii $\Delta = (\mathcal{W}, \mathcal{D})$. Pro množinu $\mathcal{S}$ formulí logiky prvního řádu definujeme $\Delta_{\mathcal{S}}$ sjednocení $\mathcal{W}$ a defaultních pravidel $\alpha \rightarrow \gamma$ pro která

$$\neg\beta \notin \mathcal{S} \text{ a } \frac{\alpha : \beta}{\gamma} \in \mathcal{D}$$

Pokud $Th(\Delta_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$, by se mohlo nazvat $\mathcal{S}$ extenzí $\Delta$, ale extenze se definuje jinak (viz dále).

# Obousměrnost implikace

Extenze se definuje jinak z následujícího důvodu:

- V logice, pokud $p \rightarrow q$, pak také $\neg q \rightarrow \neg p$.
- V default pravidlech ale toto nechceme:
  $clovek : umiChodit \rightharpoonup umiChodit$
  - chceme použít jen v tomto směru
  - není vhodné z $\neg umiChodit$ usuzovat $\neg clovek$ – nechci chromým upřít lidství.

Proto následující definice, která zaručuje, že se default pravidla používají jen ve správném směru.
$\Gamma(\mathcal{S})$ bude obdoba logického důsledku $Th$ pro odvozování i s pomocí defaultů.

# Extenze (rozšíření) defaultní teorie

## Definition (Extenze)

Mějme teorii defaultů $\Delta = (\mathcal{W}, \mathcal{D})$ a množinu formulí $\mathcal{S}$. Definujeme množinu $\Gamma(\mathcal{S})$ formulí následujícím způsobem:

- $Th(\Gamma(\mathcal{S})) = \Gamma(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{W}$
- Pokud $\frac{\alpha:\beta}{\gamma} \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \Gamma(\mathcal{S})$, $\neg\beta \notin \mathcal{S}$, pak $\gamma \in \Gamma(\mathcal{S})$.
- $\Gamma(\mathcal{S})$ je minimální množina splňující předchozí dva body.

Pokud $\Gamma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, nazveme $\mathcal{S}$ **extenzí** $\Delta$.

# Příklad

Jistá znalost

$\mathcal{W} = \{uk(fero), slovak(fero), \neg(cesky(x) \& slovensky(x))\}$

Defaulty

$\mathcal{D} = \left\{ \frac{uk(X):cesky(X)}{cesky(X)}, \frac{slovak(X):slovensky(X)}{slovensky(X)} \right\}$

- $\mathcal{S}_1 =$ $Th(\{uk(fero), slovak(fero), cesky(fero), \neg slovensky(fero)\})$
- $\mathcal{S}_2 =$ $Th(\{uk(fero), slovak(fero), \neg cesky(fero), slovensky(fero)\})$
- V kandidátovi $\mathcal{R}_3 = Th(\{uk(fero), slovak(fero)\})$ nás default pravidla tlačí k přijetí dalších doměnek,
- v kandidátovi $\mathcal{R}_4 =$ $Th(\{uk(fero), slovak(fero), cesky(fero), slovensky(fero)\})$ je tato množina společně s $W$ sporná, tj. není konzistentní žádná podmínka defaultu, tj. žádný default nemůže být použit a $cesky(fero), slovensky(fero)$ je neopodstatněné.

# Ověření extenze

Najít extenzi není jen tak (těžší než NP-úplné).
Následující věta umožní ověření, zda je $\mathcal{S}$ extenze $\delta$.

**Theorem (Reitrův test extenze)**

*Mějme teorii defaultů* $\Delta = (\mathcal{W}, \mathcal{D})$ *a množinu formulí* $\mathcal{E}$.
*Definujeme:*
$\mathcal{E}_0 = \mathcal{W}$ *a pro každé* $i = 0, 1, \ldots,$

$$\mathcal{E}_{i+1} = Th(\mathcal{E}_i) \cup \left\{ \gamma | \exists \alpha \exists \beta (\alpha \in \mathcal{E}_i \& (\neg \beta \notin \mathcal{E}) \& \frac{\alpha : \beta}{\gamma} \in \mathcal{D}) \right\}$$

*Potom je* $\mathcal{E}$ *extenze* $\Delta$ *právě když* $\mathcal{E} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}_i$.

# Příklad teorie bez extenze

$$\mathcal{W} = \emptyset \text{ a } \mathcal{D} = \left\{ \frac{: a}{\neg a}, \frac{: \neg a}{a} \right\}$$

# Normální defaulty

Default pravidlo tvaru $(\alpha : \beta) \rightharpoonup \beta$ se nazývá **normální default**. Pokud jsou všechny defaulty v $\mathcal{D}$ normální, nazýváme $(\mathcal{W}, \mathcal{D})$ normální teorií defaultů.

# Vlastnosti normální teorie defaultů

Definujeme množinu generujících defaultů *GD* následovně:

$$GD(\mathcal{E}, \Delta) = \left\{ \frac{\alpha : \beta}{\gamma} \in \mathcal{D} | ((\alpha \in \mathcal{E} \& (\neg\beta \notin \mathcal{E}) \right\}$$

Nechť máme $\mathcal{D}^| \subset \mathcal{D}$ množiny normálních defaultů, $\Delta = (\mathcal{D}, \mathcal{W})$, $\Delta^| = (\mathcal{D}^|, \mathcal{W})$. Pak

1. Teorie $\Delta$ má alespoň jednu extenzi,
2. Pro každou extenzi $\mathcal{E}^|$ teorie $\Delta^|$ existuje extenze $\mathcal{E}$ teorie $\Delta$ taková, že
$$GD(\mathcal{E}^|, \Delta^|) \subseteq GD(\mathcal{E}, \Delta).$$

# Odvozování podobně jako rezoluce v Prologu

- odvozujeme jako Prologem
- pokud se nám $pred(a, X)$ nedaří dokázat, podíváme se po defaultu $(\alpha : \beta) \rightharpoonup \beta$, kde $\beta$ lze unifikovat s $pred(a, X)$
- ověříme, že $\neg\beta$ není dokazatelné
- přidat "unifikované $\beta$" do báze znalostí
- (rekurzivně) najdeme důkaz $\alpha$
- za důkaz $\alpha$ přidáme default pravidlo a odvodili jsme $\beta$.
- pri backtrackingu musíme odstranit i příslušná "$\beta$" ze zásobníku.

# Prolog v default logice

Prologovská negace neúspěchem může být vyjádřena v logice defaultů tak, že pro každý $n$–ární predikát $p$ přidáme default pravidlo:

$$\frac{: \neg p(X_1, \ldots, X_n)}{\neg p(X_1, \ldots, X_n)}$$

Přidávání do databáze je obecně nutné, v Prologu ne.

$$\mathcal{W} = \{a \vee b\} \text{ a } \mathcal{D} = \left\{ \frac{: \neg a}{\neg a}, \frac{: \neg b}{\neg b} \right\}$$

Můžeme předpokládat $\neg a$ nebo $\neg b$, ale pokud předpokládáme obojí, dostaneme spolu s $\mathcal{W}$ spornou teorii.