Příklady z logiky – 1

1. Dokažte:

   $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

   $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

   $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

   $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)$

   $(A \mathbin{\&} B) \rightarrow A$

   $(A \mathbin{\&} B) \rightarrow B$

   $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \mathbin{\&} B)))$

   $(A \mathbin{\&} B) \rightarrow (B \mathbin{\&} A)$

   $((A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C)) \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C)$

   $(A \mathbin{\&} A) \leftrightarrow A$

   $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((A \mathbin{\&} C) \rightarrow (B \mathbin{\&} D)))$

   $(A \mathbin{\&} B) \rightarrow ((\neg C \rightarrow D) \rightarrow (A \mathbin{\&} ((\neg B \vee C) \vee \neg D)))$

   $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow (((A \mathbin{\&} B) \vee \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D))$

   $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

   $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$

   $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

   $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A)$

   $A \rightarrow (A \vee B)$

   $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

   $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (C \vee D))$

   $(A \vee A) \leftrightarrow A$

   $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

   $((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

   $(A \mathbin{\&} (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C))$

   $(A \mathbin{\&} (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n)) \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} B_1) \vee (A \mathbin{\&} B_2) \vee \ldots \vee (A \mathbin{\&} B_n))$

2. Dokažte, že formální systém výrokové logiky se schematy axiomů (A1) – (A3) a odvozovacím pravidlem *modus ponens* je stejně silný jako formální systém se stejnými axiomy a *pravidlem řezu*. Pravidlo řezu: $\frac{\neg A \vee B \qquad A \vee C}{B \vee C}$

3. Dokažte, že formální systém výrokové logiky se schematy axiomů (A1) – (A3) a odvozovacím pravidlem *modus ponens* je stejně silný jako formální systém se stejným odvozovacím pravidlem a se schematy (A1), (A2) a (A4). Schema (A4): $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

4. Mějme nekonečné spočetné množiny atomů $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ a $\{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$. Mějme teorii $T = \bigcup_{i \in N} \{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1})\} \cup \bigcup_{i \in N} \{q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1})\}$.

   Pro které dvojice n, m formule $p_n \rightarrow p_m$ vyplývá z T? Pro které dvojice n, m formule $p_n \rightarrow (p_m \vee q_m)$ vyplývá z T?