Množinové operace nad jazyky

Sjednocení jazyků $L_1 \cup L_2 = \{ w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2 \}$

Příklad: jazyk obsahuje slova začínající baba nebo končící baa

Průnik jazyků $L_1 \cap L_2 = \{ w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2 \}$

Příklad: jazyk obsahuje slova se sudým počtem nul a každý symbol 1 je bezprostředně následován 0

Rozdíl jazyků $L_1 - L_2 = \{ w \mid w \in L_1 \wedge w \notin L_2 \}$

Příklad: jazyk obsahuje slova začínající baba a neobsahující abb

Doplněk jazyka $-L = \{ w \mid w \notin L \} = X^* - L$

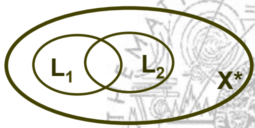
Příklad: slova jazyka neobsahují posloupnost tří symbolů 1

Platí tradiční de Morganova pravidla

$L_1 \cap L_2 = -(-L_1 \cup -L_2)$

$L_1 \cup L_2 = -(-L_1 \cap -L_2)$

$L_1 - L_2 = L_1 \cap -L_2$



Uzavřenost na množinové operace

Nechť L_1 a L_2 jsou jazyky rozpoznávané konečnými automaty. Potom $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2$ a $-L_1$ jsou také jazyky rozpoznávané konečnými automaty (třída $\mathcal{F}$ je uzavřena na uvedené operace).

Konstruktivní důkaz:

doplněk

stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajícího det. automatu

sjednocení, průnik a rozdíl

idea: paralelní běh přijímajících automatů

$A_1 = (Q_1,X,\delta_1,q_1,F_1)$, $A_2 = (Q_2,X,\delta_2,q_2,F_2)$

uděláme spojený automat $A = (Q,X,\delta,q,F)$

$Q = Q_1 \times Q_2$, $q = (q_1,q_2)$

$\delta((p_1,p_2),x) = (\delta_1(p_1,x), \delta_2(p_2,x))$

sjednocení $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

průnik $F = F_1 \times F_2$

rozdíl $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$

Množinové operace v příkladě

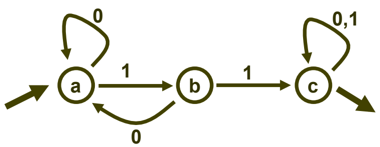
Navrhněte konečný automat přijímající slova, která obsahují 3k+2 symbolů 1 a neobsahují posloupnost 11.

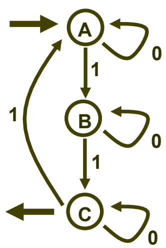
Přímá konstrukce komplikovaná!

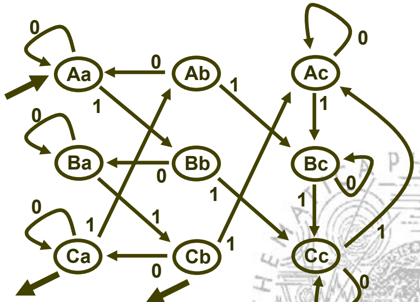
$L_1 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \wedge |w|_1 = 3k+2\}$

$L_2 = \{w \mid u,v \in \{0,1\}^* \wedge w = u11v\}$

$L = L_1 - L_2$



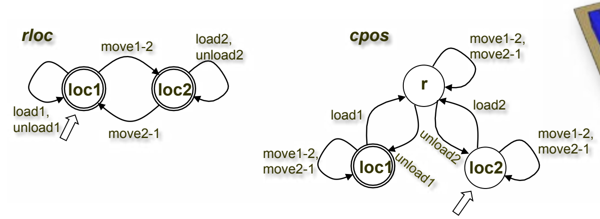


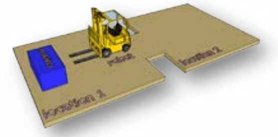


K čemu to je?

Můžeme operace s automaty někde přímo využít?

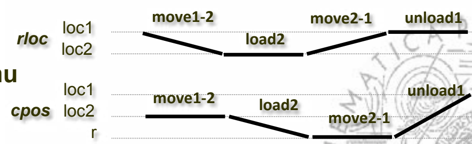
Například v plánování, kde automat popisuje, jak se mění hodnota nějaké stavové proměnné.





Plán se potom může hledat jako průnik automatů.

V každém stavovém diagramu se provede stejná posloupnost akcí.



Řetězcové operace nad jazyky

Zřetězení jazyků	$L_1 . L_2 = \{ uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2 \}$
Mocniny jazyka	$L^0 = \{\lambda\}$
	$L^{i+1} = L^i . L$
Pozitivní iterace	$L^+ = L^1 \cup L^2 \dots = \cup_{i\geq 1} L^i$
Obecná iterace	$L^* = L^0 \cup L^1 \dots = \cup_{i\geq 0} L^i$
zřejmě $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$	
Otočení jazyka	$L^R = \{ u^R \mid u \in L \}$
reverse, zrcadlový obraz	$(x_1x_2\dots x_n)^R = x_n\dots x_2x_1$
Levý kvocient L_1 podle L_2	$L_2 \setminus L_1 = \{ v \mid uv \in L_1 \wedge u \in L_2 \}$
Levá derivace L podle w	$\partial_w L = \{w\} \setminus L$
Pravý kvocient L_1 podle L_2	$L_1 / L_2 = \{ u \mid uv \in L_1 \wedge v \in L_2 \}$
Pravá derivace L podle w	$\partial^R_w L = L / \{w\}$

Uzavřenost zřetězení

$L_1,L_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow L_1.L_2 \in \mathcal{F}$

L_1	L_2

idea:

nejprve počítá automat $A_1=(Q_1,X,\delta_1,q_1,F_1)$ potom $A_2=(Q_2,X,\delta_2,q_2,F_2)$

realizace:

pomocí nedeterministického konečného automatu $B=(Q,X,\delta,S,F)$

nedeterminismus slouží při rozhodování kdy přepnout do A_2

$Q = Q_1 \cup Q_2$ (předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenuj)

$S = \{q_1\}$ pokud $\lambda \notin L_1$ ($q_1 \notin F_1$)

$= \{q_1, q_2\}$ pokud $\lambda \in L_1$ ($q_1 \in F_1$), tj. rovnou přejdeme také do A_2

$F = F_2$ končíme až po přečtení slova z L_2

$\delta(q,x)$	$= \{\delta_1(q,x)\}$	pokud $q \in Q_1 \wedge \delta_1(q,x) \notin F_1$	(počítáme v A_1)
	$= \{\delta_1(q,x), q_2\}$	pokud $q \in Q_1 \wedge \delta_1(q,x) \in F_1$	(přechod A_1 do A_2)
	$= \{\delta_2(q,x)\}$	pokud $q \in Q_2$	(počítáme v A_2)

DCV: ověřit $L(B) = L(A_1) . L(A_2)$

Uzavřenost iterace

$L \in \mathcal{F} \Rightarrow L^* \in \mathcal{F}$

$u_1 \in L$	$u_2 \in L$	$u_3 \in L$

idea: opakovaný výpočet automatu $A=(Q,X,\delta,q_0,F)$

realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart

pozor! $\lambda \in L^*$ i když $\lambda \notin L$, řešíme pomocí speciálního stavu

hledáme nedeterministický automat $B=(Q',X,\delta',S,F')$

$Q' = Q \cup \{s\}$ přidáme nový stav pro příjem λ

$S = \{q_0, s\}$ nový stav

$F' = F \cup \{s\}$ končíme po přečtení slova z L nebo v s (pro λ)

$\delta'(q,x)$	$= \{\delta(q,x)\}$	pokud $q \in Q \wedge \delta(q,x) \notin F$	(počítáme uvnitř A)
	$= \{\delta(q,x), q_0\}$	pokud $q \in Q \wedge \delta(q,x) \in F$	(možný restart)
$\delta'(s,x)$	$= \{\}$	žádné přechody z nového stavu	

$L \in \mathcal{F} \Rightarrow L^+ \in \mathcal{F}$

stejná konstrukce, pouze bez použití stavu s

Uzavřenost reverse

$L \in \mathcal{F} \Leftrightarrow L^R \in \mathcal{F}$

L

zřejmě $(L^R)^R = L$, a tedy stačí ukázat $L \in \mathcal{F} \Rightarrow L^R \in \mathcal{F}$

idea: obrátíme „šipky“ ve stavovém diagramu

realizace: nedeterministický konečný automat

$A=(Q,X,\delta,q_0,F) \rightarrow B=(Q,X,\delta',F,\{q_0\})$

$\delta'(q,x) = \{p \mid \delta(p,x)=q \}$ $(\delta(p,x)=q \Leftrightarrow p \in \delta'(q,x))$

$w = x_1x_2\dots x_n$

$q_0, q_1, \dots q_n$ je přijímající výpočet pro w automatu A

tj. $\delta(q_i,x_{i+1})=q_{i+1}$ a $q_n \in F$

$\Leftrightarrow$

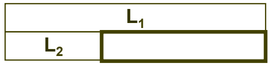
$q_n, q_{n-1}, \dots q_0$ je přijímající výpočet pro w^R automatu B

$q_i \in \delta'(q_{i+1},x_{i+1})$

Poznámka:

někdy L nebo L^R má výrazně jednodušší přijímající automat

Uzavřenost kvocientu



$L_1, L_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow L_2 \setminus L_1 \in \mathcal{F}$

idea: automat A_1 budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem z L_2

realizace: nedeterministický automat B „téměř“ totožný s A_1 (rozdíl ve startovních stavech)

$S = \{q \mid q \in Q_1\ \exists u \in L_2\ q = \delta_1(q_1, u)\}$ nové startovní stavy

lze nalézt algoritmicky ($A_q = (Q_1, X, \delta_1, q_1, \{q\})$, pak $q \in S \Leftrightarrow L(A_q) \cap L_2 \neq \emptyset$)

$v \in L_2 \setminus L_1$

$\Leftrightarrow \exists u \in L_2\ uv \in L_1$

$\Leftrightarrow \exists u \in L_2\ \exists q \in Q_1\ \ \delta_1(q_1, u) = q \wedge \delta_1(q, v) \in F_1$

$\Leftrightarrow \exists q \in S\ \ \delta_1(q, v) \in F_1$

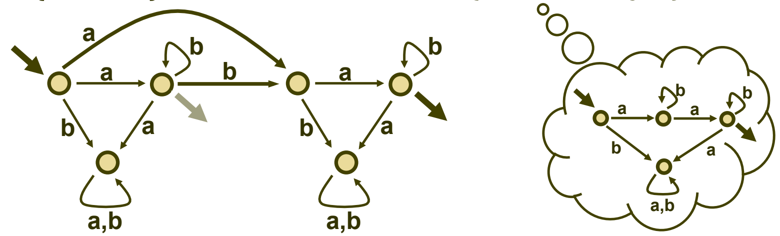
$\Leftrightarrow v \in L(B)$

$L_1, L_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow L_1 / L_2 \in \mathcal{F}$

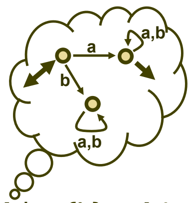
obdobně nebo pomocí $L_1 / L_2 = (L_2^R \setminus L_1^R)^R$

Příklady řetězcových operací

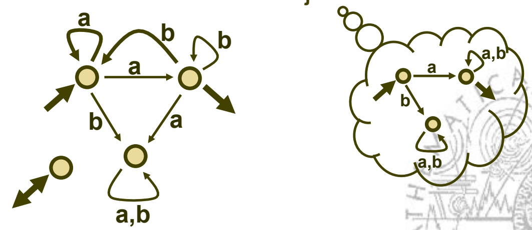
$L = \{ab^i, i \geq 0\}$ $L.L = \{ab^iab^j, i \geq 0, j \geq 0\}$



$L^+ = \{ab^{i_1}ab^{i_2} \ldots ab^{i_n}, n>0, i_j \geq 0\}$

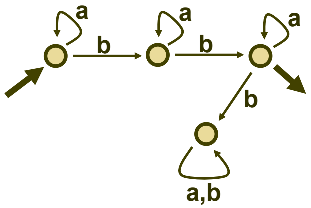


$L^* = \{\lambda\} \cup L^+$

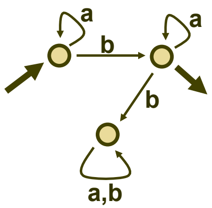


Příklad kvocientu

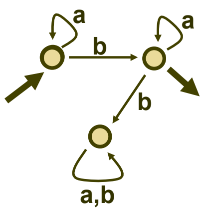
$L_1 = \{a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}, i_j \geq 0\}$



$L_2 = \{a^{i_1}ba^{i_2}, i_j \geq 0\}$



$L_2 \setminus L_1 = \{a^{i_1}ba^{i_2}, i_j \geq 0\} = L_2$



Substituce jazyků

nechť X je konečná abeceda

pro každé $x \in X$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě Y_x

dále položme:

$\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$

$\sigma(u.v) = \sigma(u) . \sigma(v)$

zobrazení $\sigma: X^* \rightarrow P(Y^*)$, kde $Y = \cup_{x \in X} Y_x$ se nazývá *substituce*

$\sigma(L) = \cup_{w \in L} \sigma(w)$

nevypouštějící substituce, žádné $\sigma(x)$ neobsahuje λ

Příklad:

$\sigma(0) = \{a^ib^j, i,j \geq 0\}$, $\sigma(1) = \{cd\}$

$\sigma(010) = \{a^ib^jcda^kb^l, i,j,k,l \geq 0\}$

homomorfismus h: $h(x) = w_x$ (speciální případ substituce)

nevypouštějící homomorfismus: $w_x \neq \lambda$

Věta: $L \in \mathcal{F}, \forall x \in X\ \sigma(x) \in \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(L), h(L), h^{-1}(L) \in \mathcal{F}$

$h^{-1}(L) = \{w \mid h(w) \in L\}$

Poznámky k uzávěrovým vlastnostem

Zjednodušení návrhu automatů

$L.\emptyset = \emptyset.L \quad = \emptyset$

$\{\lambda\}.L = L.\{\lambda\} \quad = L$

$(L^*)^* \quad = L^*$

$(L_1 \cup L_2)^* \quad = L_1^*(L_2.L_1^*)^* = L_2^*(L_1.L_2^*)^*$

$(L_1.L_2)^R \quad = L_2^R . L_1^R$

$\partial_w(L_1 \cup L_2) \quad = \partial_w L_1 \cup \partial_w L_2$

$\partial_w(X^* - L) \quad = X^* - \partial_w L$

$h(L_1 \cup L_2) \quad = h(L_1) \cup h(L_2)$

Důkaz regulárnosti

$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_1 = |w|_0\}$ není regulární

$L \cap \{0^i 1^j, i,j \geq 0\} = \{0^i 1^i, i \geq 0\}$