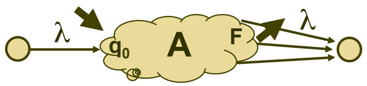
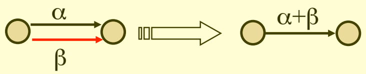
Od automatu k regulárnímu výrazu jinak

Ohodnocení hran regulárním výrazem

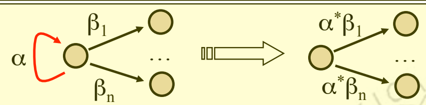
Nejprve vytvoříme automat s jedním vstupem a jedním výstupem



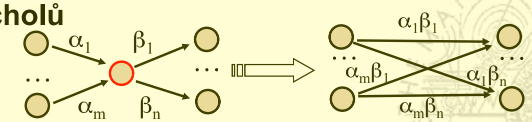
– spojení hran



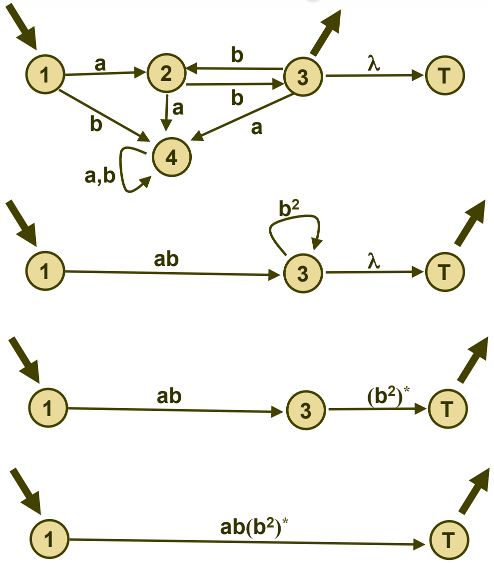
– eliminace smyček



– eliminace vrcholů



Od automatu k regulárnímu výrazu v příkladě



Stačí přidat pouze nový koncový stav.

Eliminujeme smyčku 4.

Eliminujeme uzel 4.

Eliminujeme uzel 2.

Eliminujeme smyčku 3.

Eliminujeme uzel 3.

Automaty s výstupem (motivace)

… aneb jak zaznamenat výpočet automatu?

Dosud jediná zpráva z automatu - jsme v přijímajícím stavu.
Můžeme z konečného automatu získat více informací?
Můžeme zaznamenat trasu výpočtu?

1) indikace stavů (všech, nejen koncových)
   v každé chvíli víme, kde se automat nachází
   Příklad: různé (regulární) čítače

2) indikace přechodů
   po přečtení každého symbolu víme, co automat udělal
   Příklad: (regulární) překlad slov

Automat už není tak docela černá skříňka.

Mooreův stroj

Mooreovým (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q,X,Y,\delta,\mu,q_0)$ resp. pětici $A = (Q,X,Y,\delta,\mu)$, kde:

- Q - konečná neprázdná množina stavů (*stavový prostor*)
- X - konečná neprázdná množina symbolů (*vstupní abeceda*)
- Y - konečná neprázdná množina symbolů (*výstupní abeceda*)
- δ - zobrazení $Q \times X \to Q$ (*přechodová funkce*)
- μ - zobrazení $Q \to Y$ (*značkovací funkce*)
- $q_0 \in Q$ (*počáteční stav*)

Poznámky:

– někdy nás nezajímá počáteční stav, ale jen práce automatu

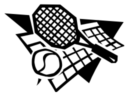
– značkovací funkce umožňuje suplovat roli koncových stavů

$F \subseteq Q$ nahradíme značkovací funkcí $\mu : Q \to \{0,1\}$ takto:

$\mu(q)$ = 0, pokud $q \notin F$

= 1, pokud $q \in F$

Příklad Mooreova stroje



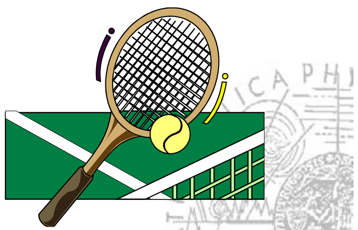
Navrhněte automat počítající tenisové skóre.

Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod

Výstupní abeceda/stavy: skóre (tj. Q=Y a $\mu(q)=q$)

Stav/výstup	*A*	*B*
00:00	15:00	00:15
15:00	30:00	15:15
15:15	30:15	15:30
00:15	15:15	00:30
30:00	40:00	30:15
30:15	40:15	30:30
30:30	40:30	30:40
15:30	30:30	15:40
00:30	15:30	00:40
40:00	A	40:15
40:15	A	40:30
40:30	A	shoda
30:40	shoda	B
15:40	30:40	B
00:40	15:40	B

Stav/výstup	*A*	*B*
shoda	A:40	40:A
A:40	A	shoda
40:A	shoda	B
A	15:00	00:15
B	15:00	00:15



Mealyho stroj

Mealyho (sekvenčním) strojem **nazýváme šestici**

A = (Q,X,Y,δ,λ,q_0) resp. pěticí A = (Q,X,Y,δ ,λ), kde:

Q - konečná neprázdná množina stavů (*stavový prostor*)

X - konečná neprázdná množina symbolů (*vstupní abeceda*)

Y - konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)

δ - zobrazení $Q \times X \rightarrow Q$ (*přechodová funkce*)

λ - zobrazení $Q \times X \rightarrow Y$ (*výstupní funkce*)

$q_0 \in Q$ (*počáteční stav*)

Poznámka:

výstup je určen stavem a vstupním symbolem

tj. Mealyho stroj je obecnějším prostředkem než stroj Mooreův

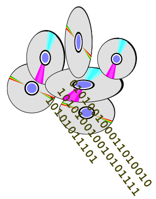
značkovací funkci $\mu : Q \rightarrow Y$ lze nahradit výstupní funkcí λ: $Q \times X \rightarrow Y$

například takto:

$\forall x \in X \;\; \lambda(q,x) = \mu(q)$

nebo takto $\forall x \in X \; \lambda(q,x) = \mu(\delta(q,x))$

Příklad Mealyho stroje



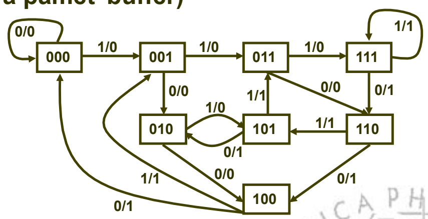
Navrhněte automat, který dělí vstupní slovo v binárním tvaru číslem 8 (celočíselně).

Realizace:

– posun o tři bity doprava (1101010 → 0001101)

– potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů (vlastně dynamická tříbitová paměť-buffer)

Stav\symbol	0	1
000	000/0	001/0
001	010/0	011/0
010	100/0	101/0
011	110/0	111/0
100	000/1	001/1
101	010/1	011/1
110	100/1	101/1
111	110/1	111/1



Vadí nám, když nevíme, kde automat startuje?

NE - po třech symbolech začne počítat správně

Výstup sekvenčních strojů

slovo ve vstupní abecedě → slovo ve výstupní abecedě

Mooreův stroj

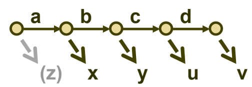
značkovací funkce μ: Q → Y

μ^* : Q×X*→ Y*

$\mu^*(q,\lambda) = \lambda$ (někdy $\mu^*(q,\lambda) = \mu(q)$)

$\mu^*(q,wx) = \mu^*(q,w) \,.\, \mu(\delta^*(q,wx))$

Příklad: μ^*(00:00,AABA) = (00:00 .) 15:00 . 30:00 . 30:15 . 40:15



Mealyho stroj

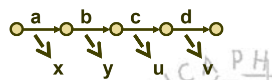
výstupní funkce λ: $Q \times X \rightarrow Y$

λ^* : Q×X*→ Y*

$\lambda^*(q,\lambda) = \lambda$

$\lambda^*(q,wx) = \lambda^*(q,w) \,.\, \lambda(\delta^*(q,w),x)$

Příklad: μ^*(‚000‘,1101010) = 0001101



Převod Mooreova stroje na Mealyho

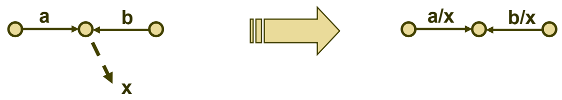
Nechť $A = (Q,X,Y,\delta,\mu,q_0)$ je Mooreův stroj.

Umíme najít Mealyho stroj B tak, že $\forall q,w\ \mu^*(q,w) = \lambda^*(q,w)$?

ANO!

položme $B = (Q,X,Y,\delta,\lambda,q_0)$, kde $\lambda(q,x) = \mu(\delta(q,x))$

tj. λ vrací značku stavu, do kterého přejdeme



Příklad:

stav	0	1	výstup
a	a	b	0
b	b	c	1
c	c	a	2

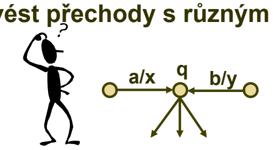
stav	0	1
a	a/0	b/1
b	b/1	c/2
c	c/2	a/0

Převod Mealyho stroje na Mooreův

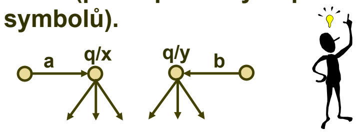
Nechť $A = (Q,X,Y,\delta,\lambda,q_0)$, je Mealyho stroj.

Sestrojme Mooreův stroj B tak, že $\forall q,w\ \lambda^*(q,w) = \mu^*(q,w)$.

Problém: do jednoho stavu mohou vést přechody s různým výstupem!



Řešení: stav rozdělíme na více stavů (podle počtu výstupních symbolů).



Teď už je to jednoduché! $B = (Q{\times}Y,X,Y,\delta',\mu,(q_0,\_))$, kde

$\delta'((q,y),x) = (\delta(q,x), \lambda(q,x))$ a $\mu((q,y)) = y$

Příklad:

stav	0	1
a	a/0	b/0
b	a/1	b/1

stav	0	1	výstup
(a,0)	(a,0)	(b,0)	0
(a,1)	(a,0)	(b,0)	1
(b,0)	(a,1)	(b,1)	0
(b,1)	(a,1)	(b,1)	1

Konečné automaty - shrnutí

Konečný automat

- jednoznačný redukovaný automat
- nedeterminismus (2^n), dvousměrný KA (n^n)

Automaty a jazyky

- regulární jazyky
- uzavřenost na množinové operace
- uzavřenost na řetězcové operace
- uzavřenost substituce

Charakteristika regulárních jazyků

- Nerodova věta (kongruence)
- Kleeneova věta (elementární jazyky a operace)
- Iterační lemma (iterace podslov, jen nutná podmínka)