

# Herní algoritmy, předn. 4

Proof number search

Lambda search

Jan Hric, Petr Baudiš

NAIL103, ZS

18. prosince 2013

# Obsah

- 1 Úvod  
    Úvod
- 2 PNS alg.  
    Idea
- 3 PNS varianty  
    Varianty
- 4 Depth first PNS  
    DF-PNS
- 5 Další PNS
- 6 Lambda search  
    Lambda search

# Proof number search, úvod

- Používá se typicky pro hledání (úplné) útočné nebo obranné strategie, tj. dokazování, zda je pozice vyhraná
- Idea: některé větve mají mnohem lehčí (tj. menší) důkaz
- Hodí se uspořádaní tahů
- Uniformní prohledávání do stejné hloubky (jako alfabeta) má nevýhody. Hluboké, ale většinou *vyucené* větve lze dokázat snadněji.
- V mnoha hrách, větvící faktor není uniformní:
  - šachy: král musí uniknout z šachu, jinak prohra
  - dáma: skákat se musí (v pravidlech). Taky to zjednodušuje pozici.
  - go: u kamenů "blízko" života stačí spočítat málo útočných tahů, ostatní jsou neúčinné
- důsledek: omezený větvící faktor, zvyšuje se hloubka prohledání

# PNS

- PNS: Victor Allis 1994; předtím McAllester: *conspiracy numbers*, min. počet vrcholů, které "změní" hodnotu kořene
- najde důkaz anebo vyvrácení pro pozici
- konstruuje oba stromy současně (proof, disproof), rozvíjí vždy jeden (nejpřínosnější) uzel
- alg. v průběhu výpočtu některé uzly dokáže anebo vyvrátí, ale většina uzlů je ve stavu *neznámý* (...)
- alg. končí, až je kořen známý, tj. *dokázaný* nebo *vyvrácený*
- v principu: informované prohledávání do šířky, nemusí najít nejmenší strom

## PNS (2)

- Mějme průběžný neúplný strom: jak daleko jsme od dokázání/vyvrácení? (Výsledek nevíme dopředu.)
- Najdeme minimální (proti-)důkazovou množinu ((dis-)proof set): množina vrcholů, které musí být dokázány/vyvr., aby jsme dok./vyvr. kořen
- Princip: optimizmus při neurčitosti (bude i v MCTS)
- Předpokládejme cenu neznámého uzlu 1 - to je dolní mez
- Důkaz máme, když má důkazová množina velikost 0. (analogicky pro vyvrácení)
- Idea: expandujeme vrchol z min. důkazové a min. vyvracecí množiny (analogie PV)

# Nejslibnější uzel

- Klíčová vlastnost PNS: vždy existuje ve stromě nejslibnější uzel (Most-Promising Node, MPN)
- MPN je v průniku minimální důkazové a minimální vyvracecí množiny
- Vyřešení MPN pomůže při důkaze nebo vyvracení, protože zmenší velikost příslušné minimální množiny pro kořen
- V průběhu alg. po rozvinutí jednoho MPN velikosti min. množin typicky vzrostou (kromě koncových pozic).
- Pozn: MPN není jednoznačný, což nevádí.

# PNS algoritmus

- Proof number vrcholu  $n$ : velikost minimální důkazové množiny pro  $n$ . Optimistický odhad nejkratšího důkazu  $n$ .
- Disproof number: velikost minimální vyvracecí množiny pro  $n$ . Optimistický odhad nejkratšího vyvrácení  $n$ .
- PNS alg.: najdi MPN a expanduj. Přepočítej hodnoty PN a DN. Cykli, dokud není kořen dokázaný nebo vyvrácený (a jsou zdroje).
- (MPN skáče mezi podstromy; podobně jako expandovaný uzel v MCTS)

# Proof a Disproof numbers v listech

- Značení:  $n.pn$  = proof number vrcholu  $n$
- Značení:  $n.dn$  = disproof number vrcholu  $n$
- List, výhra:  $n.pn = 0$ ,  $n.dn = \infty$
- List, prohra:  $n.pn = \infty$ ,  $n.dn = 0$
- List, neznámý:  $n.pn = n.dn = 1$
- Výhra a prohra: podle pravidel hry



# Proof a Disproof numbers ve vnitřních vrcholech

- připomenutí: pro důkaz kořene potřebujeme dokázat jednoho syna v OR-uzlu a všechny syny v AND-uzlu (OR=MAX)
- počítání čísel zdola; když máme hodnoty v synech, pak
- pro OR-uzel je PN *minimum* z PN-hodnot synů a DN je *součet* DN-hodnot všech synů
- pro AND-uzel duálně: PN je součet a DN je minimum
- předpoklad: podstromy se řeší nezávisle (neplatí vždy (tj. použitelné na DAG/DCG); způsobí neoptimalitu (až přetečení), ale ne chybný výsledek)

# Vzorce

*Backup* fáze (terminologie: přepočítání?), zdola

- OR-uzel:  $n.pn = \min_{s \in \text{synove}(n)} s.pn$
- OR-uzel:  $n.dn = \sum_{s \in \text{synove}(n)} s.dn$
- AND-uzel:  $n.pn = \sum_{s \in \text{synove}(n)} s.pn$
- AND-uzel:  $n.dn = \min_{s \in \text{synove}(n)} s.dn$
- operace s  $\infty$ :  $\infty + \infty = \infty$ ,  $\infty + c = \infty$ ,  $\min(c, \infty) = c$ ...

# Dokázané a vyvrácené vrcholy

- Dokázaný vrchol  $n$ :  $n.pn = 0$ ,  $n.dn = \infty$
- Vyvrácený vrchol  $n$ :  $n.pn = \infty$ ,  $n.dn = 0$
- Výhry a prohry se propagují podle očekávání:
- Pro OR-uzel syn  $s_i$  je výhra:
  - $n.pn = \min(s_1.pn, \dots, s_i.pn, \dots) = \min(\dots, 0, \dots) = 0$
  - $n.dn = \sum(s_1.dn, \dots, s_i.dn, \dots) = \sum(\dots, \infty, \dots) = \infty$
- Pro AND-uzly duálně, tj. prohodíme  $.pn$  a  $.dn$

# PNS impl.

- základní impl.: informovaně do šířky, uzly v paměti
  - pro OR-uzly podle min PN
  - pro AND-uzly podle min DN
- optimalizace: při přepočítávání zdola můžeme zastavit, pokud se hodnoty pn a dn nemění (nastává, když víc synů mělo stejné pn, resp. dn). Výběh MPN spustíme odtud.

# Analýza

- pro jedno rozvinutí MPN: (bez optimalizací)
- Výběr MPN: hloubka MPN  $\times$  prům. faktor větvení
- Úprava PNs: stejné
- Expanze MPN: počet synů  $\times$  cena vytvoření a inicializace uzlu
- Paměť na iteraci: počet synů  $\times$  velikost uzlu
- Pokud je strom vyvážený a faktor větvení omezený konstantou: hloubka je  $O(\log n)$  pro  $n$  uzlů, čas  $O(\log n)$ ,  $O(1)$  paměti za iteraci
- Celkový čas pro strom s  $n$  uzly, omezené větvení:  $\Theta(n \log n)$  pro vyvážený strom,  $\Theta(n^2)$  pro degenerovaný (malé větvení, hluboké větve)

# PNS, komentáře

- Best-first, vhodný pro nevyvážené stromy
- Adaptuje se na hluboké, ale úzké důkazy
- Nezaručuje krátkou výhru a malý strom důkazu - ignoruje cenu dosud vygenerované části
- Chová se spíš jako (lokální) "čistě heuristické prohledávání" z jedno-agentového prohledávání stavového prostoru než jako optimální A\* (např. nejlepší řešení může být "schované" za jedním nevynuceným, přípravným tahem)
- Existuje alg. AO\*, ekvivalent k A\*, pro hledání nejlepších řešení v AND/OR stromech. (Ale v obecnosti chceme hledat v grafech, typicky acyklických)

## PNS, komentáře 2

- náročný na paměť, všechny uzly jsou v paměti (depth first PNS to odstraňuje)
- dokázané a vyvr. stromy lze vypouštět z paměti (pokud si je nechci uschovat/prohlížet; můžu vypsát do logu)
- lze vypouštět nekritické větve
- kompromis: pro účely znovuprohledání si pamatuju PN a DN kořene vypouštěné větve
- líné vypouštění, když dochází paměť
- (viz alg. SMA\*, analogie k A\*, ale s omezenou pamětí)

# Použití

- na vyřešení her: ..., piškvorky
- na koncovky; ... např. shogi (japonské šachy na 9x9)
- pro praktické použití potřeba přeformulovat do depth first varianty
- nezávislý na hře: nepotřebuje heuristiku (řídí se stromem), ale nepodporuje přímou integraci heuristiky (viz)
  - některé hry (např. Arimaa) nemají významně různý počet tahů pro dobré a špatné pozice



# PNS na DAG

víc realistická varianta

- je dobře definovaný, počítání hodnot zdola
- Problém 1: vrchol má víc než jednoho rodiče
- Problém 2: nadhodnocení PN a DN

# na DAG, víc rodičů

Problém 1: vrchol má víc rodičů

- Přepočítání všech? Cena se zvýší, nejhůř z  $\Theta(\log n)$  na  $\Theta(n)$  na iteraci
- Přepočítání pouze jednoho? Hodnoty se rozsynchronizují a MPN bude nepřesně počítán
- Obvykle: přepočítání jednoho rodiče, ostatní až/pokud jsou zpracovány
- Otevřený problém: jde to lépe?

# na DAG, nadhodnocení

## Problém 2: nadhodnocení PN a DN

- připomenutí: PN a DN odhadují min. počet listů, které se musí vyřešit
- v DAG se stejný list může započítat po několika cestách
- toto nadhodnocení může být exponenciálně horší
- důsledek: lehký vrchol vypadá (velmi) těžce; následně vrcholy mimo dis/proof set musíme rozpracovat o (hodně) víc než při těsnějších mezích
- vyskytuje se v praxi: tsume shogi (úlohy, (dlouhé) koncovky), go
- možnosti: Proof-set search (Nagai), úpravy df-pns

# Heuristická inicializace

- Heuristická inicializace pn a dn (stejně nepočítá nejmenší stromy)
- Připomenutí: pn a dn jsou dolní meze pro cenu vyřešení uzlu
- Inicializace hodnotou 1 je naivní
- Lze najít lepší odhad? Závisí na pozici. Lze použít doménovou znalost, např. bezpečnost krále, go: "vzdálenost k životu"
- Jsou pn a dn nepřímo úměrné? Ne zcela.
- Významné zlepšení v praxi
- Pouze *částečná* a nepřímá heuristika, netýká se stromu
- Otevřená otázka: lze použít strojové učení? A jak?

## Vylepšení: výhled jednoho tahu

- Jak dopadne expanze jednoho uzlu? V případě, že se ho nepodaří vyřešit.
  - OR uzel:  $p_n = 1$  před a  $p_o$ ,  $d_n = 1$  před a počtu dětí  $p_o$
  - AND uzel:  $d_n = 1$  před a  $p_o$ ,  $p_n = 1$  před a počtu dětí  $p_o$
- v mnoha hrách je laciné spočítat nebo odhadnout(!) počet následníků; go: počet volných průsečíků je dobrý odhad
- inicializujeme  $d_n$  v OR- a  $p_n$  v AND-uzlu odhadem počtu dětí
- v podstatě to znamená, máme výhled o 1 tah dál
- Jak tato inicializace interaguje s jinými (např. doménovými) metodami?

# Vyhodnocení listu

okamžité vs. odložené ohodnocení; immediate resp. delayed evaluation

- *Okamžité ohodnocení*: rozvinu list a nové syny hned ohodnotím
- mám víc informací, tj. řízení je lepší
- *Odložené ohodnocení*: list se ohodnotí, až je vybrán jako MPN
- za speciálních okolností, viz př.
- - může být několik "úrovní" vyhodnocení: 1. rychlé, nepřesné; 2. přesné
- Př, v  $PN^2$ :  $PN_2$  má okamžité ohodnocení,  $PN_1$  odložené (ale pamatuju si dolní odhady PN a DN)

## Rozšíření na vícehodnotový případ

např. výhra - remíza - prohra; go: život, seki a (různé druhy) ko, přesné počítání koncovek

- Série boolovských hledání; např. binární nebo sekvenční hledání
- Každé hledání (průchod) používá mez pro listy, podobně jako hledání s nulovým oknem
- Otevřený problém: Jak využít stromy důkazu z minulých průchodů?
  - Lehký případ: minulé hledání bylo s přísnějšími mezemi než aktuální
  - Těžký případ: nový cíl je těžší

## Případová studie: Dáma/Checkers

- Řešení dámy, Schaffer a kol.
- Použití *jádra* (seed) pro generování stromu: nejlepší varianty jsou navrženy lidskými experty
- Pseudo-důkaz: předpokládejme, že všechno se (statickým) ohodnocením  $> 150$  je výhra,  $< -150$  je prohra. Vytvoří se strom.
- Až se strom s mezí  $\pm 150$  vybuduje, zvýší se mez na  $\pm 200$ , atd. Až mez dosáhne  $\pm \infty$ , máme úplný důkaz.



## Případová studie: Dáma/Checkers (2)

- Pro rozšiřování stromu lze použít *simulace* už hotových stromů - stejný tah/podstrom zkusíme u bratra. Navíc nejlepší tahy už typicky máme: jádro, eval. okolo 0.
- Listy v pseudodůkazu: v koncovkách je strom malý (resp. použijeme endgame tabulky)
- Listy uvnitř: máme problém, pokud pseudolist  $n$  je "výhra", ale pozice je reálně prohra - pak musíme najít jiný důkaz otce (nebo vzdálenějšího předchůdce)  $n$ . Málo časté, pouze když heur. fce je nepřesná
- Speciálně: v dobrých pozicích můžu udělat horší tah, abych se dostal do již dokázané části stromu, resp. na položky TT (kde je eval. okolo 0).

# Předchůdce PNS: Konspirační čísla pro AB

- navrženo McAllister 1985, 1988
- Kolik vrcholů v Alfabetě se musí dohodnout, aby změnili minimaxovou hodnotu kořene?
- Připomenutí: PV není jedinečná, musí se změnit vrcholy ve "všech" PV (v nichž platí  $val = PV.val$ )
- Zjednodušení, omezení na boolovský případ vedlo V. Allise k PNS

# PNS: dodatky

- dobré a špatné příklady pro PNS
- správa paměti a garbage collection
- dvojúrovňový PNS -  $PN^2$  (jedno z prvních vylepšení)
- negamax formulace PNS
- úprava na (iterované) prohledávání do hloubky - df-pns
- prohledávání s omezenou šířkou: case study: hex; použitelné obecně, hodí se uspořádání tahů (tj. integrace heur./doménové info)
- (další:  $PN^*$ , PDS,  $\lambda$ PNS, EF-PN (evaluation function-based) )

# Chování

## Dobré případy

- nerovnoměrné větvení
- rychlé důkazy/vyvrácení pro některé větve (chybu soupeře rychle potrestáme, máme jádro pro simulace)
- počet tahů koreluje s pravděpodobností výhry; šachy: málo obranných tahů (při šachu) může znamenat král v problémech

## Špatné případy

- "všude to vypadá stejně"
- uniformní větvení, bez rychlých výher/proher; přípravné tahy
- v podstatě: drahý způsob pro neinformované prohledávání

# PNS :-)

## Velmi špatné případy

- Když PNS aktivně "zavádí na scesti"
- Př: krátký důkaz potřebuje 3 uzly, ale existuje velký strom s  $pn \leq 2$
- Mnoho vynucovacích tahů, které nefungují. Funguje pouze "tichý" tah.
- Go: větvící se schody, všechny větve selžou, ale "gheta" (sít) funguje
- př. Arimaa: zmrazení nebo braní (nepodstatných) figur soupeře (nejčastěji je cíl dosažen vlastní volností (goal) a ne omezením soupeře (swarm a bez tahu; bez králíků))
- Q: vztah k problému horizontu?

# Dvojúrovňový PNS - $PN^2$

- První PNS běží v kořeni
- V listech běží druhý PNS, omezený (prahem, pamětí): jeho informace se propagují nahoru
- Strom druhého PNS se zahazuje - šetří to paměť, ale případně plýtvá zdroji. Např. se nechávaní synové druhotného kořene v prvním stromu
- Nevýhoda: Kořenový PNS je celý v paměti
- impl.: pro  $M$  = velikost paměti a  $x$  = # uzlů v hlavním stromě, druhotný strom rozvine  $\min(M, 1 + e^{\frac{x-a}{b}})$ , vhodné  $a, b$  ( $b$  určuje kvocient,  $a$  bázi)
- → druhotné stromy rostou zhruba geometrickou řadou ("kapitánský krok"), díky přeskokování MPN prozkoumáváme různé větve se zvyšujícím se úsilím

# Negamax formulace PNS

- $n.\phi = n.pn$  v OR-uzlu,  $n.dn$  v AND-uzlu
- $n.\delta = n.dn$  v OR-uzlu,  $n.pn$  v AND-uzlu
- Vzorec pro výpočet:  $n.\phi = \min(s_1.\delta, \dots, s_k.\delta)$
- Vzorec pro výpočet:  $n.\delta = \sum(s_1.\phi, \dots, s_k.\phi)$
- Důsledek: z hlediska výpočtu nerozlišuju OR a AND uzly

# Úprava na prohlédávání do hloubky

- Depth-first verze PNS: df-pn (následně několik variant alg.)
- Nagai, 2002
  - df-pn se chová jako PNS, expanduje MPN
  - pro úplnost: obecně je víc MPN, výběr z nich se může lišit
  - základní verze df-pn: pouze iterace v kořeni
- Snižuje opakované expanze vnitřních vrcholů
- Používá TT, chová se dobře i s malými tabulkami
- df-pn(r): Kishimoto, Müller: úprava df-pn pro hry s opakováním (dáma, ko v go), tj. DCG, nejen DAG (impl. počítá min. vzdálenost od kořene)
- předchůdci: PDS: iterativní prohlubování (pouze) v kořeni, tj. zvyšování prahů; PN\*: zvyšování pouze pro pn; ...



# Přínosy Df-pn

- Efektivita
- Paměť
- Opakované iterativní prohlubování ve vnitřních vrcholech
- Rozšíření pro vyhnutí se dvojitému počítání v DAG
- Rozšíření v df-pn+ umožní ocenit hrany, najde optimální řešení v And/Or grafech (jako AO\*)

## Df-pn: Idea pro výpočet Min

- v PNS, hledání často "uvízne" v jednom podstromě na dlouhou dobu
- pokud víme určit MPN (most proving node), nezajímají nás konkrétní pn a dn čísla - lze odložit backup
- př:  $n.pn = \min(80, 70, \mathbf{20}, 65, 50) = 20$
- lokálně, zůstaneme v podstromě s  $pn = 20$ , dokud jeho pn (ostře) *nepřevyšší* druhé nejmenší  $pn_2$  mezi syny, tj. 50 v př.
- globálně, musíme kontrolovat zda se volba větve nezmění někde výš ve stromě. To lze poslat z rodiče dolů jako práh.
- Vzorec pro nový práh  $pn$ :  $\min(\text{parent}.pn, pn_2 + 1)$

# Df-pn: Idea pro výpočet Sum

- $n.pn = \sum(s_1.pn, \dots, s_k.pn)$
- Máme práh pro vrchol  $n$ ,  $n.mezpn$
- Q: Jak dlouho budeme pracovat v  $s_i$ ?
- A: Dokud  $n.pn \geq n.mezpn$  anebo zvýšení v  $s_i$  nepřevýší rozdíl  $n.mezpn - n.pn$ .
- Vzorec:  $s_i.mezpn = s_i.pn + (n.mezpn - n.pn)$
- tj. vyčerpali jsme rezervu, je jedno, kde (z hlediska důkazu)

# Opakované iterativní prohlubování

## Multiple Iterative Deepening (MID)

- Iterativní "prohlubování" v každém vrcholu, nejen v kořeni
- Prohloubení znamená zvýšení *prahu*, nikoli hloubky
- Vhled: pn a dn se můžou i snížit, nejen zvýšit (když se dokáže syn nějakého sum-uzlu)
- df-pn volá z kořene MID s prahy  $\pm\infty$
- používá TT

# df-pn+

## Myšlenky:

- Heuristická inicializace v listech: určuje obtížnost důkazu/vyvrácení pro list
- Ohodnocení hran
  - Měří "dychtivost" zkoumání tohoto tahu
  - vysoká cena hrany: preferuj plytké stromy, víc do šířky
  - nízká cena: preferuj tuto větev

# Šetření paměti

- Běží s malou spotřebou paměti
- Prořezávání (Nagai): SmallTreeGC, SmallTreeReplacement
- SmallTreeGC: GC se předají vrcholy s malými podstromy
- SmallTreeReplacement: Hašování pomocí otevřené adresace, vyzkoušej pár (např. 10) položek a nahraď tu s nejmenším stromem
- Jiná možnost: Hašování se zřetězením - ukládá se víc než 1 položka na 1 adresu (i zde potřebuje uvolňovat)
- DC impl.: jak uvolňovat globálně nejmenší? Chceme on-line, jako side-efekt (plovoucí mez)

# Weak PNS

- Pokud pracujeme na DAG, PNS nadhodnocuje  $p_n$  a  $d_n$ , protože jeden vrchol je započítán po několika cestách
- Weak PNS odstraňuje tuto nevýhodu: místo sumy pro  $d_n$  v OR- (a analogicky  $p_n$  v AND-uzlu) počítá
- $d_n(n) = \max d_n(s) + n.nevyresenySyn - 1$  pro OR-uzel
- tj. další děti, kromě nejtěžšího, započítá pouze hodnotou 1

# Focused DFPNS, FDFPNS

- PNS prohledává všechny uzly, neprořezává jako Alfabet
- Když hra neposkytuje vodítko, prohledávám i zbytečné větve (které nejsou ve výsledném stromě; typicky na začátku)
- Příklad: **Hex**: ve stejné hloubce stejné větvení; Arimaa: velké větvení řádu  $10^4$  (protože v tahu mám až 4 kroky za sebou)
- Idea: omezit šířku, tj. počet aktivních synů jednoho uzlu.
- Pokud se některého syna podaří dokázat, další ještě nezpracovaný syn se stane aktivní
- Využívá uspořádání, preferuje nejlepší uzly (!za oba, tj. nejtěžší, nejúčinnější obranu). (Ostatní chci přeskočit, ne (projít a) vyvrátit)
- Q: Integrace s jinými technikami



# Další

- PNS skáče mezi větvemi, to není kompatibilní s inkrementální úpravou d.s./stavových informací. Např. pro Hex se engine bez inkrementálního počítání 2x zpomalil
- Lambda DFPN, LDFPN - kombinace PNS a lambda stromů: pomocí PNS řeší  $\lambda_i$ -strom pro nejmenší  $i$
- $1 + \epsilon$  trick, Lew Lukasz 2006: prahy v DFPNS zvětšují geometrickou řadou, to zmenšuje počet přeskoků mezi podstromy, které se případně nevejdou do TT
  - (použitelné i v MCTS: spočítat pevnou část (např. 1/10) počtu návštěv v akt. uzlu a neopouštět uzel, dokud se nevykoná aspoň tolik playoutů v podstromě)
- Q: srovnání s SMA\* (Simplified Memory-Bounded A\*) - explicitně zahazuje nejméně slibné vrcholy a pamatuje si dolní odhady uvolněných vrcholů

# Lambda Search

- Allis a kol. 1996, Thomsen 2000, Cazenave 2002
- Idea: používáme hrozby různého řádu  $n$
- Řád hrozby neformálně: kolikrát může soupeř vynechat tah (tj. null move/pas) než prohraje
- V  $\lambda^n$ -stromě se prohledávají pouze hrozby řádu  $n$ , bez ohledu na hloubku stromu.
- Pokud ve vrcholu není  $\lambda^n$ -tah, vrchol je listem, prohraným (pro hráče na tahu)
- Rozlišujeme útočníka, který hraje v kořeni a snaží se o *splnění cíle*, a obránce (attacker, defender) - nesymetrické role
- příklad pro představu: piškvorky

# Lambda Strom

- Značení:  $\lambda^n=1$ , pokud útočník může vyhrát v dané pozici pomocí hrozby řádu  $n$ , jinak  $\lambda^n=0$
- Rekurzivní definice  $\lambda^n$ -stromu, podle hloubky:
- Úspěšný  $\lambda^0$ -strom pro útočníka: obsahuje jeden  $\lambda^0$ -tah, který splní cíl
- $\lambda^n$ -strom obsahuje  $\lambda^n$ -tahy, listy jsou prohrané pro hráče na tahu (tj. nemá  $\lambda^n$ -tah)
- $\lambda_a^n$ -tah pro útočníka je tah, že pokud obránce pasuje, existuje  $\lambda^i$ -strom s  $\lambda^i=1$  pro  $0 \leq i \leq n-1$ . Tj. útočník hrozí vyhrát hrozbou nižšího řádu
- $\lambda_d^n$ -tah pro obránce je tah, že po něm neexistuje žádný  $\lambda^i$ -strom s  $\lambda^i=1$  pro  $0 \leq i \leq n-1$ . Tj. obránce odvrátil všechny hrozby nižšího řádu
- Př: Go: schody:  $\lambda_a^1$ - a  $\lambda_d^1$ -tahy; při neúspěšných schodech v listě neex. další  $\lambda_a^1$ -tah

# Lambda Search

- Důsledek:  $\lambda^n$  tahy jsou určeny  $\lambda^{n-1}$ -prohledáváním.
- Obvykle je  $\lambda^{n-1}$  strom mnohem menší než  $\lambda^n$ -strom
- Následně  $\lambda$ -prohledávání prořeže tahy podle  $\lambda$  úrovně účinně, s malým úsilím

# Použitelnost

- $\lambda$ -search je nesymetrický, cíl je pro útočníka
- použitelné na globální i lokální cíle
- integrovatelné se znalostmi pro konkrétní hru: Hex, Havannah, Piškvorky, Go
  - (vše jsou nepohyblivé, "spojovací" hry)
  - řád hrozby se dá odhadnout z pozice (piškvorky, svobody v go)
  - i (ne-)relevantní útočné a obranné tahy; př. obrany: most v Hexu, vlastně miai (2 záměnné tahy)
  - (nejen "nepohyblivá") hra dovoluje hledat místa, které jsou relevantní (př: tahy dvojího účelu)
  - (impl: pro vyloučení tahů Ú/O potřebujeme opačné meze odhadu)

# Vlastnosti

- Vlastnosti, vztahy:
- Pokud  $\lambda^n=1$ , pak  $\lambda^k=1$  pro  $n \leq k$
- Pokud  $\lambda^n=0$ , pak  $\lambda^i=0$  pro  $0 \leq i \leq n$
- Korektnost:
- Výsledek  $\lambda^n=1$  je korektní, pokud hra má tah pas nebo zugzwang není cílem hry/úlohy (!, neformálně)
- $\lambda^n=0$  znamená, že řešení neexistuje anebo je na vyšší úrovni hrozby  $n' > n$

# Lambda Search, Doplnky

- Zobecněné hrozby: Cazenave 2002 - počítá uzly na jednotlivých úrovních (pro jemnější dělení stromů)
- Simulace: Kawano 1996 (PNS search) - využívání informací z prohledaných částí stromu (!)  
Idea: tahy z úspěšných podstromů zkouším v podobném kontextu, dořešíme pouze místa, kde se výsledky liší; zobecnění killerů; stejné tahy zkoušíme v jiných pozicích, tj. TT nevyužíváme přímo
- ( $\alpha - \beta$  jako driver pro PNS)

# Dual Lambda Search

- Dual lambda search: Soeda 2005 ( $\mu$ -search): (tsume shogi)
- motivace: původní  $\lambda$ -search je nesymetrický. Soupeř má taky cíl
- Idea: Vyhrává ten, kdo má hrozbu nižšího řádu - hrozby soupeře musím nejdřív odvrátit
- $\lambda^n$ -stromy útočníka nesmí obsahovat úspěšný strom (ostře) nižšího řádu pro soupeře
- Při prohledávání musím odvracet hrozby soupeře: širší strom
- Při rovnosti řádu hrozeb výhoda tempa. Př: piškvorky; go: semeai (boj)