

# ŘEŠENÉ ÚLOHY Z VÝROKOVÉ A PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

J. Mlček  
2011

**Témata.**

Booleovské počty.

**E.1.1. Booleovské počty.**

Bud'  $\langle B, -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$  Booleova algebra. Binární operace  $-, \dot{-}, \rightarrow, \leftrightarrow$  v  $B$  se definují takto:

$$\begin{aligned} a - b &= a \wedge (-b), & a \dot{-} b &= (a - b) \vee (b - a), \\ a \rightarrow b &= -a \vee b, & a \leftrightarrow b &= (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a). \end{aligned}$$

**1. Potenční algebry.**

a) Jak spolu souvisí algebry  $\underline{\mathcal{P}(I)} = \langle \mathcal{P}(I), -, \cup, \cap, \emptyset, I \rangle$  a  $\underline{I_2} = \langle I_2, -_I, \vee_I, \wedge_I, 0_I, 1_I \rangle$ ? (V  $\underline{I_2}$  se každá uvedená operace bere po složkách v  $\underline{I_2}$ .)

ŘEŠENÍ. Jsou izomorfní via  $u \mapsto \text{ch}_u$ , kde  $\text{ch}_u$  je charakteristická funkce množiny  $u \in \mathcal{P}(I)$ .

b) Jaká je velikost konečné Booleovy algebry?

ŘEŠENÍ. Velikost konečné Booleovy algebry  $\underline{B}$  je  $2^n$  s nějakým  $0 < n \in \mathbb{N}$ .  $\underline{B}$  je totiž atomární, má tedy  $n$  atomů pro nějaké  $0 < n \in \mathbb{N}$  a tedy je izomorfní s  $\underline{\mathcal{P}(n)}$ ; přitom  $|\mathcal{P}(n)| = 2^n$ .

c) Kolik atomů má konečná  $m$ -prvková Booleova algebra  $\underline{B}$ ?

ŘEŠENÍ.  $\log_2 m$ , neboť  $m = 2^k$ , kde  $k$  je počet atomů algebry  $\underline{B}$ ; je  $\underline{B} \cong \underline{\mathcal{P}(k)}$ .

**2. Úpravy booleovských termů.**

Pomocí  $\rightarrow$  a komplementu  $-$  vyjádřete v Booleově algebře:

a)  $a \vee b$ .

ŘEŠENÍ.  $a \vee b = -(-a) \vee b = (-a) \rightarrow b$ .

b)  $a \wedge b$ .

ŘEŠENÍ.  $a \wedge b = -(-a \vee -b) = -(a \rightarrow -b)$ .

c)  $a - b$ .

ŘEŠENÍ.  $a - b = a \wedge (-b) = -(a \rightarrow b)$ .

d)  $a \dot{-} b$ .

ŘEŠENÍ.  $a \dot{-} b = (a - b) \vee (b - a) = (a \rightarrow b) \rightarrow -(b \rightarrow a)$ .

**3. Vlastnosti  $\dot{-}$ .**

a) Dokažte v Booleově algebře:  $-(a \leftrightarrow b) = a \dot{-} b$ .

ŘEŠENÍ.  $-(a \leftrightarrow b) = -((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)) = -(a \rightarrow b) \vee -(b \rightarrow a) = (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a) = a \dot{-} b$ .

b) Dokažte v Booleově algebře:  $a \dot{-} b = (a \vee b) - (a \wedge b)$ .

ŘEŠENÍ.  $a \dot{-} b = (a - b) \vee (b - a) = ((a \vee b) \wedge (a \vee -a)) \wedge ((-b \vee b) \wedge (-b \vee -a)) = (a \vee b) \wedge -(b \wedge a)$

**4. Algebra  $\underline{C_\infty}$ .**

$\underline{C_\infty}$  je podalgebra algebry  $\underline{\mathbb{N}_2}$  s univerztem  $C_\infty \subseteq \mathbb{N}_2$  tvořeným právě všemi funkcemi  $f \in \mathbb{N}_2$ , které mají periodu  $p$  pro nějaké  $0 < p \in \mathbb{N}$ , tj.  $f(i) = f(i + p)$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ .

a) Dokažte, že  $\underline{C_\infty}$  je spočetná bezatomární Booleova algebra.

ŘEŠENÍ.  $C_\infty = \bigcup_{0 < p \in \mathbb{N}} C_p$ , kde  $C_p$  je množina všech  $f \in \mathbb{N}_2$ , které jsou  $p$ -periodické. Je  $|C_p| = 2^p$ . Tudíž je  $C_\infty$  spočetné. Je-li  $f$  nenulový prvek algebry  $\underline{C_\infty}$  periody  $p$ , je  $f(i) = 1$  pro nějaké  $i < p$  a pak  $g$  liší se od  $f$  jen v  $i + 2kp$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$  je nenulový prvek algebry  $\underline{C_\infty}$  a menší, než  $f$ .

- b)\*Dokažte, že množina  $C_{od} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  všech funkcí  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  majících nějakou lichou periodu  $p$ , tj.  $f(i) = f(i + p)$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , je univerzum podalgebry algebry  $\underline{C}_{\infty}$ .  
ŘEŠENÍ.  $C_{od}$  je uzavřeno jasně na komplement a obsahuje nulu i jedničku algebry  $\underline{C}_{\infty}$ . Zbývá dokázat uzavřenost  $C_{od}$  na spojení a průnik. Jsou-li  $f, g \in C_{od}$  po řadě liché periody  $p, q$ , jsou obě liché periody  $pq$  a jejich spojení i průsek je liché periody  $pq$ , tj. je v  $C_{od}$ .

**Témata.**

Příklady jazyků a struktur.  
 Sestrojení formule s daným významem.  
 Substituce. Instance. Varianty.  
 Vlastnosti platnosti ve struktuře.  
 Definovatelné množiny.  
 Podstruktura, extenze, expanze, redukt struktury.  
 Elementární problematika modelů teorií.  
 Izomorfismus struktur.  
 Generované podstruktury.  
 Struktura  $\langle \mathbb{R}, |-| \rangle$ .  
 Přičítání jedničky; teorie  $SC_0^-$ ,  $SC_0$   
 Modely teorií UFO a  $CE_\omega$ .  
 Elementární podstruktury.

**E.2.1. Příklady jazyků a struktur.**

1.

a) Uveďte jazyk pro vektorové prostory nad tělesem  $F$ .

ŘEŠENÍ.  $\langle +, -, 0, \hat{r} \rangle_{r \in F}$ ;  $+$  je binární,  $-$  unární,  $0$  je nulární funkční symbol,  $\hat{r}$  je unární funkční symbol pro  $r \in F$  (představující násobení skalárem;  $\hat{r}(x)$  se píše zpravidla jako  $rx$ ).

b) Uveďte jazyk těles a jazyk Booleových algeber. Porovnejte je?

ŘEŠENÍ.  $\langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  a  $\langle -, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ . Jsou izomorfní via  $+ \mapsto \vee$ ,  $- \mapsto -$ ,  $\cdot \mapsto \wedge$ ,  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto 1$ .

2.

a) Buď  $L = \langle p \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  jazyk bez rovnosti, přičemž  $\mathbb{P}$  je neprázdná množina nulárních relačních symbolů. Buď  $A$  reálný interval  $[2, \infty)$ ,  $v : \mathbb{P} \rightarrow A$ . Je struktura  $\langle A, v(p) \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  model pro  $L$ ?

ŘEŠENÍ. Ne. Není totiž  $v(p) \subseteq A^0 (= \{0\})$  pro každé  $p \in \mathbb{P}$ .

b) Buď  $L = \langle p \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  jazyk bez rovnosti, přičemž  $\mathbb{P} \neq \emptyset$  je neprázdná množina nulárních relačních symbolů. Buď  $A$  reálný interval  $[2, \infty)$ ,  $v : \mathbb{P} \rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Je struktura  $\langle A, v(p) \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  model pro  $L$ ?

ŘEŠENÍ. Ano. Je totiž  $v(p) \subseteq A^0$  pro každé  $p \in \mathbb{P}$ .

3.

a) Buď  $L = \langle R, \dots, F, \dots \rangle$  jazyk. Existuje pro každé  $A \neq \emptyset$  nějaká  $L$ -struktura s univerzem  $A$ ?

ŘEŠENÍ. Ano.  $L$ -struktura tvaru  $\langle A, R^A, \dots, F^A, \dots \rangle$  s  $R^A = \emptyset, \dots, F^A$  konstantní,  $\dots$ .

b) Existuje jazyk  $L$  takový, že každé dvě spočetné  $L$ -struktury jsou izomorfní?

ŘEŠENÍ. Ano. Jazyk  $L = \langle c \rangle$ , přičemž  $c$  je konstantní symbol, má každé dva spočetné modely izomorfní.

c) Buď  $L = \langle R, F \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $R$  je binární relační symbol,  $F$  je  $n$ -ární funkční symbol a nechť  $A = \{a\}$  je jednoprvková. Kolik je až na izomorfismus  $L$ -struktur s univerzem  $A$ ?

ŘEŠENÍ. Právě dvě. Totiž  $\langle A, \emptyset, F^A \rangle$  a  $\langle A, A^2, F^A \rangle$ , kde  $F^A = A^n \times \{a\}$ .

d) Má-li jazyk  $L$  nějaký relační symbol  $R$ , existují pro každou velikost  $\kappa$  alespoň dvě neizomorfní  $L$ -struktury obě velikosti  $\kappa$ ?

ŘEŠENÍ. Ano. Jsou-li  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  dvě  $L$ -struktury a  $R^{\mathcal{A}} = \emptyset, R^{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ , není  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

- e) Má-li jazyk  $L$  s rovností funkční symbol  $F$  nenulové četnosti, existují pro každou velikost  $\kappa \geq 2$  alespoň dvě neizomorfní  $L$ -struktury obě velikosti  $\kappa$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Jsou-li  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  dvě  $L$ -struktury s univerzy velikosti alespoň 2,  $F^{\mathcal{A}}$  je konstantní a  $F^{\mathcal{B}}$  není, není  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

#### 4. O grafech.

- a) Buď  $L = \langle R \rangle$  jazyk s rovností. Napište v  $L$  axiomatiku grafů bez hran.  
 ŘEŠENÍ. Má jediný axiom  $(\forall x, y) \neg R(x, y)$ .
- b) Buď  $0 < k \in \mathbb{N}$ . Uveďte signaturu pro  $k$ -obarvené obyčejné grafy.  
 ŘEŠENÍ.  $\langle R, C_0, \dots, C_{k-1} \rangle$ , kde  $R$  je binární relační symbol (prezentující hrany) a  $C_i$  je unární relační symbol (prezentující  $i$ -tou barvu obarvující vrcholy).
- c) Buď  $\mathcal{A} = \langle A, R \rangle$  struktura, kde  $R \subseteq A^n$ . Uveďte podmínky na  $n$  a  $R$  tak, aby struktura  $\mathcal{A}$  byla obyčejný graf (tj. neorientovaný a bez smyček).  
 ŘEŠENÍ.  $n = 2$ ,  $R \subseteq A^2$  je symetrická a antireflexivní v  $A$ , tj.  $R = R^{-1}$  a  $R \subseteq A^2 - \text{Id}_A$ .
- d) Buď  $\langle A, R \rangle$  obyčejný graf,  $0 < k \in \mathbb{N}$ . Popište expanzi struktury  $\langle A, R \rangle$ , která je  $k$ -obarvením  $\langle A, R \rangle$ .  
 ŘEŠENÍ.  $\langle A, R, C_0, \dots, C_{k-1} \rangle$ ,  $C_i$  jsou unární, disjunktí, pokrývající  $A$  a takové, že pro každé  $a, b \in A$  platí:  $R(a, b) \Rightarrow (C_i(a) \Rightarrow \text{není } C_i(b))$ .

#### 5. O uspořádáních.

- a) Buď  $L = \langle R \rangle$  jazyk s rovností. Napište v  $L$  axiomatiku uspořádání, jehož žádné dva různé prvky nejsou porovnatelné.  
 ŘEŠENÍ.  $\{R(x, x), x \neq y \rightarrow \neg R(x, y)\}$ .
- b) Právě kdy je struktura  $\langle A, R \rangle$ , kde  $R$  je relace, uspořádání?  
 ŘEŠENÍ. Právě když  $R$  je binární, reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická na  $A$  (poslední značí:  $R(a, b)$  a  $R(b, a) \Rightarrow a = b$ ).
- c) Právě kdy je struktura  $\langle A, R \rangle$ , kde  $R$  je relace, lineární uspořádání?  
 ŘEŠENÍ. Právě když  $R$  je binární, reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická na  $A$  (poslední značí:  $R(a, b)$  a  $R(b, a) \Rightarrow a = b$ ) a  $R$  je navíc dichotomická na  $A$ , tj. pro každé  $a, b \in A$  je  $R(a, b)$  nebo  $R(b, a)$ .
- d) Právě kdy je uspořádání  $\langle A, R \rangle$  uspořádání, jehož žádné dva různé prvky nejsou porovnatelné?  
 ŘEŠENÍ. Právě když je  $R = \{ \langle a, a \rangle; a \in A \} (= \text{Id}_A)$ .

### E.2.2. Sestrojení formule s daným významem.

#### 1.

- a) Navrhněte jazyk  $L$  a napište jeho formuli, vyjadřující: „existuje bytost, která zná každého člověka a existuje člověk, který nezná tuto bytost.“

ŘEŠENÍ. Buď  $L = \langle U, R \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $U$  resp.  $R$  je unární resp. binární relační symbol. Hledaná formule je tvaru  $(\exists x)((\forall y)(U(y) \rightarrow R(x, y))) \& (\exists y)(U(y) \& \neg R(y, x))$ .

- b) Navrhněte jazyk  $L$  a napište jeho formuli, vyjadřující: „existuje bytost, která zná každého člověka a existuje člověk, který nezná každého člověka.“

ŘEŠENÍ. Buď  $L = \langle U, R \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $U$  resp.  $R$  je unární resp. binární relační symbol. Hledaná formule je tvaru  $(\exists x)((\forall y)(U(y) \rightarrow R(x, y))) \& (\exists y)(U(y) \& \neg(\forall z)(U(z) \rightarrow R(y, z)))$ .

- c) Navrhněte jazyk  $L$  a napište jeho formuli, vyjadřující: „existuje bytost, která zná každého člověka a existuje člověk, který zná alespoň dva různé lidi.“

ŘEŠENÍ. Buď  $L = \langle U, R \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $U$  resp.  $R$  je unární resp. binární relační symbol. Hledaná formule je tvaru  $(\exists x)((\forall y)(U(y) \rightarrow R(x, y))) \& (\exists y)(U(y) \& (\exists z_0, z_1)(U(z_0) \& U(z_1) \& z_0 \neq z_1 \& R(y, z_0) \& R(y, z_1)))$ .

#### 2.

- a) Vyjádřete v jazyce s rovností: „Existuje alespoň  $n$  prvků“ (s daným  $0 < n \in \mathbb{N}$ ).  
 ŘEŠENÍ.  $(\exists v_0, \dots, v_{n-1}) \bigwedge_{i < j < n} v_i \neq v_j$ .
- b) Vyjádřete v jazyce s rovností: „Existuje nejvýše  $n$  prvků“ (s daným  $0 < n \in \mathbb{N}$ ).  
 ŘEŠENÍ.  $(\forall v_0, \dots, v_n) \bigvee_{i < j \leq n} v_i = v_j$ .
- c) Vyjádřete v jazyce s rovností: „Existuje právě  $n$  prvků“ (s daným  $0 < n \in \mathbb{N}$ ).  
 ŘEŠENÍ. „Existuje alespoň  $n$  prvků“ & „existuje nejvýše  $n$  prvků“.
- d) Vyjádřete v jazyce s rovností: „Existuje nekonečně prvků“.  
 ŘEŠENÍ. Vyjadřuje to schema {„Existuje alespoň  $n$  prvků“;  $0 < n \in \mathbb{N}$ } spočetně formulí.

### E.2.3. Substitute. Instance. Varianty.

#### 1. Substituovatelnost.

- a) Buď  $\varphi$  formule  $(\exists z)(x = z) \ \& \ y < x$  a dále  $x, y, z$  různé proměnné,  $F$  unární funkční symbol,  $c$  konstantní symbol. Uveďte, zda je term  $t$  substituovatelný do  $\varphi$  za proměnnou  $v$  v následujících případech:

- i)  $t$  je  $F(z)$ ,  $v$  je  $x$ .
- ii)  $t$  je  $F(z)$ ,  $v$  je  $y$ .
- iii)  $t$  je  $F(x)$ ,  $v$  je  $x$ .
- iv)  $t$  je  $F(c)$ ,  $v$  je  $y$ .

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.
- ii) Ano.
- iii) Ano.
- iv) Ano.

- b) Buď  $\varphi$  formule  $(\forall x)((\exists z)(z < x \ \& \ y = z) \vee z \neq x)$  a dále  $x, y, z$  různé proměnné,  $G$  binární funkční symbol,  $c$  konstantní symbol. Uveďte, zda je term  $t$  substituovatelný do  $\varphi$  za proměnnou  $v$  v následujících případech:

- i)  $t$  je  $G(c, x)$ ,  $v$  je  $y$
- ii)  $t$  je  $G(c, y)$ ,  $v$  je  $y$
- iii)  $t$  je  $G(c, c)$ ,  $v$  je  $z$
- iv)  $t$  je  $G(z, x)$ ,  $v$  je  $z$

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.
- ii) Ano.
- iii) Ano.
- iv) Ne.

- c) Buď  $\varphi$  formule  $(\exists y)(x \neq y)$  s různými proměnnými  $x, y$ . Buď  $\varphi'$  výsledek „nekorektní substitute“  $y$  do  $\varphi$  za volný výskyt  $x$ . Buď  $\mathcal{A}$  struktura. Uvažujme tvrzení:

$$\text{Pro každé } e : \text{Var} \rightarrow A \text{ je } \mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(x/y[e])]. \quad (*)$$

- i) Uveďte, zda (\*) platí pro  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ , kde  $+$  je sčítání přirozených čísel.
- ii) Uveďte, zda (\*) platí pro  $\mathcal{A} = \langle \{0\}, R \rangle$ , kde  $R = \{(0, 0)\}$ .
- iii) Právě pro které modely  $\mathcal{A} = \langle A \rangle$  platí (\*)?

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.
- ii) Ano.
- iii) Právě pro  $\mathcal{A}$  s  $A$  jednoprvkovým.

#### 2. Instance. Varianty.

- a) Nechť  $y$  není volná ve  $\varphi$  a je substituovatelná za  $x$  do  $\varphi$ ,  $\varphi'$  je  $\varphi(x/y)$ . Zjistěte, zda  $\varphi'(y/x)$  je  $\varphi$ . Zdůvodněte odpověď.

ŘEŠENÍ. Oba předpoklady dohromady zaručují, že volný výskyt  $y$  ve  $\varphi'$  je právě tam, kde je volný výskyt  $x$  v  $\varphi$ . Tedy  $x$  je substituovatelné za  $y$  do  $\varphi'$  a také rovnost obou uvažovaných formulí platí.

- b) Buďte  $x, y, z, u$  různé proměnné,  $Q$  kvantifikátor. Odpovězte a zdůvodněte, zda v následujících případech platí:  $\psi$  je varianta  $\varphi$ .

- i)  $\varphi$  je  $(Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x))$ ,  $\psi$  je  $(Qz)(z < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq z))$
- ii)  $\varphi$  je  $(Qx)(x < y \vee (\forall z)(z = y \ \& \ z \neq x))$ ,  $\psi$  je  $(Qy)(y < y \vee (\forall z)(z = y \ \& \ z \neq y))$
- iii)  $\varphi$  je  $(Qx)(x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x))$ ,  $\psi$  je  $(Qu)(u < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq u))$

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.  $z$  není substituovatelné za  $x$  do  $x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x)$ .
- ii) Ne.  $y$  je volná ve  $\varphi$ .
- iii) Ano.  $u$  není volná ve  $\varphi$  a je substituovatelná za  $x$  do  $x < y \vee (\exists z)(z = y \ \& \ z \neq x)$ .

- c) Buď  $P$  unární predikátový symbol,

$\varphi$  formule  $(\exists y)(y = x) \ \& \ P(x)$ ,  $\varphi'$  formule  $(\exists y)(y = y) \ \& \ P(y)$ .

- i) Je  $(\forall x)\varphi'$  varianta  $(\forall x)\varphi$ ?
- ii) Je  $x$  substituovatelné do  $\varphi'$  za  $y$ ?
- iii) Je  $\varphi$  rovno  $\varphi'(y/x)$ ?
- iv) Je  $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'(y/x)$ ?

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.
- ii) Ano.
- iii) Ne.  $\varphi'(y/x)$  je  $(\exists y)(y = y) \ \& \ P(x)$ .
- iv) Ano. Je  $\vdash (\exists y)(y = x) \leftrightarrow (\exists y)(y = y)$ , protože obě formule z ekvivalence jsou dokazatelné. Odtud  $\vdash (\exists y)(y = x) \ \& \ P(x) \leftrightarrow (\exists y)(y = y) \ \& \ P(x)$ .

#### E.2.4. Vlastnosti platnosti ve struktuře.

1.

- a) Indukcí dokažte, že hodnota  $H^A(\varphi, e)$  formule  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$  nezávisí na  $e$ , nevyskytuje-li se ve  $\varphi$  žádná proměnná.

ŘEŠENÍ. Je-li  $\varphi$  atomická formule, jasně to platí, neboť hodnota termu  $t$  bez proměnných nezávisí na ohodnocení (což snadno plyne indukci). Dále užíváme zřejmého faktu, že nevyskytuje-li se ve  $\varphi$  žádná proměnná, nevyskytuje se ani v podformuli formule  $\varphi$ . Indukční krok pro spojky: Buď  $\varphi$  tvaru  $\neg\varphi_0$  a pro  $\varphi_0$  nechť to platí. Je  $H^A(\varphi, e) = \neg_1 H^A(\varphi_0, e)$ , tedy dle indukčního předpokladu pravá strana nezávisí na  $e$  a tvrzení tedy platí. Buď  $\varphi$  tvaru  $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1$ . Pak  $H^A(\varphi, e) = H^A(\varphi_0, e) \rightarrow_1 H^A(\varphi_1, e)$  a dle indukčního předpokladu pravá strana nezávisí na  $e$  a tvrzení tedy platí. Indukční krok pro  $\forall_x$ : Buď  $\varphi$  tvaru  $(\forall x)\varphi_0$ . Je  $H^A(\varphi, e) = \min\{H^A(\varphi_0, e(x/a)); a \in A\}$ ; dle indukčního předpokladu pravá strana nezávisí na  $e$  a tvrzení tedy platí.

2.

- a) Dokažte:  $\mathcal{A} \models \neg\neg\varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

ŘEŠENÍ.  $\mathcal{A} \models \neg\neg\varphi[e] \Leftrightarrow \neg_1 \neg_1 H(\varphi, e) = 1 \Leftrightarrow H(\varphi, e) = 1$ .

- b) Dokažte:  $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$  nebo  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .

ŘEŠENÍ.  $\varphi \vee \psi$  je formule  $\neg\varphi \rightarrow \psi$ , tedy:  $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow H(\neg\varphi \rightarrow \psi, e) = 1 \Leftrightarrow \rightarrow_1 (\neg_1 H(\varphi, e), H(\psi, e)) = 1 \Leftrightarrow \neg_1 H(\varphi, e) = 0$  nebo  $H(\psi, e) = 1 \Leftrightarrow H(\varphi, e) = 1$  nebo  $H(\psi, e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$  nebo  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .

- c) Dokažte:  $\mathcal{A} \models (\varphi \ \& \ \psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$  a  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .

ŘEŠENÍ.  $\varphi \ \& \ \psi$  je formule  $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ , tedy:  $\mathcal{A} \models (\varphi \ \& \ \psi)[e] \Leftrightarrow H(\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), e) = 1 \Leftrightarrow \neg_1(\rightarrow_1 (H(\varphi, e), \neg_1 H(\psi, e))) = 1 \Leftrightarrow H(\varphi, e) = 1$  a  $\neg_1 \neg_1 H(\psi, e) = 1 \Leftrightarrow H(\psi, e) = 1$  a  $H(\psi, e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$  a  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .

d) Dokažte:  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e] \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ .

ŘEŠENÍ.  $(\exists x)\varphi$  je formule  $\neg(\forall x)\neg\varphi$ , tedy:  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(\forall x)\neg\varphi[e] \Leftrightarrow$  ne [pro každé  $a \in A$  je  $H(\neg\varphi, e(x/a)) = 1$ ]  $\Leftrightarrow$  ne [pro každé  $a \in A$  je  $H(\varphi, e(x/a)) = 0$ ]  $\Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $H(\varphi, e(x/a)) = 1 \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ .

3.

a) Buď  $\varphi$  formule  $P(x) \rightarrow (\forall x)R(x)$ , kde  $P, R$  jsou různé unární relační symboly. V právě kterých strukturách  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$  platí  $(\exists x)\varphi$ ?

ŘEŠENÍ. Právě když  $P^A \neq A$  nebo  $R^A = A$ . Máme totiž

$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \models (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x))[a] \Leftrightarrow P^A \neq A$  nebo  $R^A = A$ .

b) Buď  $\varphi$  formule  $P(x) \rightarrow (\forall x)R(x)$ , kde  $P, R$  jsou různé unární relační symboly. V právě kterých strukturách  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$  neplatí ani  $\varphi$  ani  $\neg\varphi$ ?

ŘEŠENÍ. Právě když  $\emptyset \neq P^A \neq A \neq R^A$ . Máme totiž:

i)  $\mathcal{A} \not\models \varphi \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \not\models \varphi[a] \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $(a \in P^A$  a  $R^A \neq A) \Leftrightarrow P^A \neq \emptyset$  a  $R^A \neq A$ ,

ii)  $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$  existuje  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \models (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x))[a] \Leftrightarrow P^A \neq A$  nebo  $R^A = A$ .

4.

a) Buď  $L = \langle p \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  jazyk bez rovnosti, přičemž  $\mathbb{P} \neq \emptyset$  je neprázdná množina nulárních relačních symbolů. Buď  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$  trojprvková,  $\mathcal{A} = \langle 1, p^A, q^A, r^A \rangle$ , kde  $p^A = r^A = \emptyset$ ,  $q^A = \{\emptyset\}$ . Platí  $\mathcal{A} \models \varphi$ , kde  $\varphi$  je  $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ?

ŘEŠENÍ. Ne.  $H^A(\varphi) = \neg_1 0 \rightarrow_1 (1 \rightarrow_1 0) = 1 \rightarrow_1 0 = 0$ , neboť máme  $H^A(p) = 0 = H^A(r)$ ,  $H^A(q) = 1$ .

b) Buď  $L = \langle p \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  jazyk bez rovnosti, přičemž  $\mathbb{P}$  je neprázdná množina nulárních relačních symbolů. Nechť  $\mathcal{A} = \langle A, p^A \rangle_{p \in \mathbb{P}}$  je  $L$ -struktura. Nechť  $\varphi$  je  $L$ -formule a  $\varphi^*$  se získá z  $\varphi$  vynecháním všech kvantifikací. Dokažte, že platí  $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi^*$ .

ŘEŠENÍ. Buď  $e$  ohodnocení proměnných v  $A$ . Máme dokázat, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e]$ . Dokážeme to indukcí na  $L$ -formulích. Místo  $H^A$  píšeme jen  $H$ .

Buď  $\varphi$  atomická. Formule  $\varphi^*$  je  $\varphi$  a dokazované tedy platí.

Buď  $\varphi$  tvaru  $\neg\varphi_0$  a pro  $\varphi_0$  nechtě to platí. Jelikož  $(\neg\varphi_0)^*$  je  $\neg(\varphi_0^*)$ , máme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi_0[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi_0^*[e] \text{ (dle indukčního předpokladu)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(\varphi_0^*)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e]. \end{aligned}$$

Buď  $\varphi$  tvaru  $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1$  a pro  $\varphi_0, \varphi_1$  nechtě to platí. Jelikož  $(\varphi_0 \rightarrow \varphi_1)^*$  je  $\varphi_0^* \rightarrow \varphi_1^*$ , máme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\Leftrightarrow H(\varphi_0, e) \rightarrow_1 H(\varphi_1, e) = 1 \\ &\Leftrightarrow H(\varphi_0^*, e) \rightarrow_1 H(\varphi_1^*, e) = 1 \text{ (dle indukčního předpokladu)} \\ &\Leftrightarrow H(\varphi_0^* \rightarrow \varphi_1^*, e) = 1 \Leftrightarrow H(\varphi^*, e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e]. \end{aligned}$$

Buď  $\varphi$  tvaru  $(\forall x)\varphi_0$  a nechtě  $\varphi_0$  to platí. Jelikož  $\varphi^*$  je  $\varphi_0^*$ , máme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\Leftrightarrow \min_A H(\varphi_0, e(x/a)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \min_A H(\varphi_0^*, e(x/a)) = 1 \text{ (dle indukčního předpokladu)} \\ &\Leftrightarrow H(\varphi_0^*, e) = 1 \text{ (} x \text{ není volná ve } \varphi_0^* \text{)} \Leftrightarrow H(\varphi^*, e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e]. \end{aligned}$$

## E.2.5. Definovatelné množiny.

1.

a) Buď  $\mathcal{A}$  nějaká  $L$ -struktura. Buď  $\varphi$  nějaká  $L$ -sentence. Určete  $\varphi(\bar{x})(\mathcal{A}^n)$  s  $n = l(\bar{x})$ .

ŘEŠENÍ.  $\varphi(\bar{x})(\mathcal{A}^n) = \emptyset$  resp.  $\mathcal{A}^n$ , když  $\mathcal{A} \not\models \varphi$  resp.  $\mathcal{A} \models \varphi$ .

b) Buď  $\mathcal{A}$  nějaká  $L$ -struktura. Buď  $\varphi(x)$  nějaká  $L$ -formule,  $D = \varphi(x)(\mathcal{A}^1)$ . Určete  $((\forall x)\varphi)(\mathcal{A}^0)$ .

ŘEŠENÍ.  $((\forall x)\varphi)(\mathcal{A}^0) = \emptyset$  resp.  $\{\emptyset\}$ , když  $D \neq A$  resp.  $D = A$ .

c) Buď  $\mathcal{A}$  nějaká  $L$ -struktura. Buď  $L = \langle P, R \rangle$  jazyk, přičemž  $P, R$  jsou unární relační symboly,  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$  nějaká  $L$ -struktura a  $\varphi$  formule  $P(x) \rightarrow (\forall x)R(x)$ . Určete  $\varphi(x)(\mathcal{A}^1)$ .

ŘEŠENÍ.  $\varphi(x)(\mathcal{A}^1) = A - P^A \cup D$ , kde  $D = \emptyset$  resp.  $A$ , když  $R^A \neq A$  resp.  $R^A = A$ . Tedy:  $\varphi(x)(\mathcal{A}^1) = A - P^A$  resp.  $A$ , když  $R^A \neq A$  resp.  $R^A = A$ .

2.

Buď  $\mathcal{A} = \langle A, R_0^A, R_1^A, \leq^A, c_a \rangle_{a \in A}$  struktura reprezentující databázi, kde  $R_0^A$  prezentuje tabulku  $R_0$ (Počet obyv., Město),  $R_1^A$  prezentuje tabulku  $R_1$ (Město, Stát). Přitom  $A$  je tvořené právě položkami z tabulek a dostatečně velkou množinou přirozených čísel.  $c_a$  je jméno  $a \in A$ , tj. konstantní symbol s  $c_a^A = a$ . Když  $k \in A \cap \mathbb{N}$ , značme pro přehlednost  $c_k$  jako  $k$ .  $\leq^A$  je zúžení obvyklého menšíčka mezi přirozenými čísly na  $A$ .

a) Napište formuli  $\varphi(v_0, v_1, \dots)$  definující v  $\mathcal{A}$  tabulku  $Q$ (Počet obyv., Město) ze státu F.

ŘEŠENÍ.  $\varphi(v_0, v_1)$  je  $R_0(v_0, v_1) \ \& \ R_1(v_1, c_F)$ .

b) Napište formuli  $\varphi(v_0, v_1, \dots)$  definující v  $\mathcal{A}$  tabulku států, ve kterých je město alespoň s 500000 obyvatel.

ŘEŠENÍ.  $\varphi(v_0)$  je  $(\exists x, y)(R_0(y, x) \ \& \ R_1(x, v_0) \ \& \ 500000 \leq y)$ .

c) Napište formuli  $\varphi(v_0, v_1, \dots)$  definující v  $\mathcal{A}$  tabulku států kromě států F a D, ve kterých je město s více než dvěma miliony obyvatel.

ŘEŠENÍ.  $\varphi(v_0)$  je  $(\exists x, y)(R_0(y, x) \ \& \ R_1(x, v_0) \ \& \ 2000001 \leq y \ \& \ \neg(v_0 = c_F) \ \& \ \neg(v_0 = c_D))$ .

3.

a) Buď  $\varphi(x, y)$  formule  $x \cdot x \cdot y + 1 = 0$  jazyka okruhů. Určete  $\varphi(\mathbb{R}^2)$ , kde  $\mathbb{R}$  je těleso reálných čísel.

ŘEŠENÍ.  $\varphi(\mathbb{R}^2) = \{ \langle \pm\sqrt{-1/y}, y \rangle; y < 0 \}$  ( $\sqrt{\phantom{x}}$  je odmocnina v reálném oboru).

b) Buď  $\varphi(x, y)$  formule  $x \cdot x \cdot y + 1 = 0$  jazyka okruhů. Určete  $(\varphi \ \& \ 0 \leq x)(\mathbb{R}'^2)$ , kde  $\mathbb{R}'$  je uspořádané těleso reálných čísel.

ŘEŠENÍ.  $(\varphi \ \& \ 0 \leq x)(\mathbb{R}'^2) = \{ \langle \sqrt{-1/y}, y \rangle; y < 0 \}$  ( $\sqrt{\phantom{x}}$  je odmocnina v reálném oboru).

c) Buď  $\varphi(x, y)$  formule  $x \cdot x \cdot y + 1 = 0$  jazyka okruhů. Určete  $\varphi(\mathbb{C}^2)$ , kde  $\mathbb{C}$  je těleso komplexních čísel.

ŘEŠENÍ.  $\varphi(\mathbb{C}^2) = \{ \langle x, -1/x^2 \rangle; x \neq 0 \}$ .

4.

a) Buď  $L = \langle F \rangle$  jazyk s rovnostmi, přičemž  $F$  je binární funkční symbol. Nechť  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$  je  $L$ -struktura;  $\cdot$  je obvyklé násobení reálných čísel. Napište formuli v proměnné  $x$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů interval  $(0, \infty)$ .

ŘEŠENÍ.  $(\exists y)(F(y, y) = x) \ \& \ \neg(\forall z)(F(x, z) = x)$ .

b) Buď  $L = \langle F \rangle$  jazyk s rovnostmi, přičemž  $F$  je binární funkční symbol. Nechť  $\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$  je  $L$ -struktura, kde  $\cup$  značí binární operaci sjednocení na podmnožinách  $\mathbb{N}$ . Napište formuli v proměnné  $x$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin  $\mathbb{N}$ .

ŘEŠENÍ. Je to formule  $(\forall y, z)(F(y, z) = x \rightarrow (y = x \vee z = x))$ .

5.

Buď  $L = \langle c, d \rangle$  jazyk s rovnostmi, přičemž  $c, d$  jsou dva konstantní symboly.

a) Nechť  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 1, 0 \rangle$  je  $L$ -struktura. Napište formuli v proměnných  $\langle x, y, z \rangle$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů množinu  $(A \times \{1\} \times A) - (\{0\} \times A \times (A - \{1\}))$ .

ŘEŠENÍ. Je to formule  $y = c \ \& \ \neg(x = d \ \& \ z \neq c)$ .

b) Nechť  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \sqrt{2}, -1 \rangle$  je  $L$ -struktura a  $\varphi(x, y)$  je formule  $x = c \vee y = d$ . Vyjádřete množinu  $D = \varphi(x, y)(\mathcal{A}^2)$  pomocí množinových operací.

ŘEŠENÍ.  $D = (\{\sqrt{2}\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{-1\})$ .

## E.2.6. Podstruktura, extenze, expanze, redukt struktury.

1.

a) Buď  $\mathcal{A}$  struktura neobsahující žádnou funkci ani konstantu. Kolik podstruktur má  $\mathcal{A}$ ?

ŘEŠENÍ. Každá neprázdná podmnožina  $A$  je univerzem podstruktury  $\mathcal{A}$ , tedy je jich  $2^{|A|} - 1$ .

b) Kolik je podstruktur struktury  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  (kde  $\leq$  je obvyklé uspořádání množiny  $\mathbb{Q}$  racionálních čísel)?

ŘEŠENÍ. Každá neprázdná podmnožina  $\mathbb{Q}$  je univerzem podstruktury  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ , tedy jich je kontinuum.

- c) Kolik podstruktur má standardní model  $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  přirozených čísel.  
 ŘEŠENÍ. Právě jednu, neboť podstruktura  $\mathbb{N}$  obsahuje pro každé  $n \in \mathbb{N}$  každé  $S \cdots S0$ ,  $S$  aplikováno  $n$ -krát, což je  $n$ .
- d) Obsahuje těleso  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  racionálních čísel nějakou konečnou podstrukturu?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Každá podstruktura  $\mathbb{Q}$  obsahuje pro  $n \in \mathbb{N}$  prvek  $n1 = 1 + \cdots + 1$ ,  $+$  aplikováno  $(n-1)$ -krát, což je  $n$ .
- e) Buď  $\mathcal{A}$  vektorový prostor konečné dimenze  $k$  nad reálnými čísly. Kolik podstruktur má  $\mathcal{A}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Jednu, je-li dimenze  $\mathcal{A}$  nula, dvě, je-li dimenze  $\mathcal{A}$  jedna a kontinuum jinak, neboť pak existuje kontinuum podprostorů v každé dimenzi  $1, 2, \dots, k-1$ .

## 2.

- a) Buď  $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, r \rangle_{\mathbb{R}}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} = \langle A, +, -, 0 \rangle$ . Která tvrzení platí?  
 i)  $\mathcal{B}$  je podstruktura  $\mathcal{A}$ .  
 ii)  $\mathcal{A}$  je expanze  $\mathcal{B}$ .  
 iii)  $\mathcal{A}$  je extenze  $\mathcal{B}$ .  
 iv) Existují právě dva redukty struktury  $\mathcal{A}$ , které jsou grupami.

ŘEŠENÍ.

- i) Neplatí. Jde o struktury různé signatury.  
 ii) Platí.  $\mathcal{A}$  je expanze  $\mathcal{B}$  o unární funkce  $r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .  
 iii) Neplatí. Jde o struktury různé signatury.  
 iv) Platí. Jedinými redukty, které jsou grupou, jsou  $\mathcal{B}$  a  $\langle A, +, 0, r \rangle$ , kde  $r$  je násobení skalárem  $-1$ .
- b) Existuje expanze tělesa komplexních čísel o binární relaci  $\triangleleft$  tak, že v ní platí následující?  
 $\triangleleft$  je ostré lineární uspořádání s  $0 \triangleleft 1$ ,

$$x \triangleleft y \Rightarrow -y \triangleleft -x, \quad x \triangleleft y \text{ a } 0 \triangleleft z \Rightarrow x \cdot z \triangleleft y \cdot z.$$

ŘEŠENÍ. Neexistuje. Předpokládejme totiž, že  $\triangleleft$  má požadované vlastnosti. Když  $0 \triangleleft i$ , tak  $0 \triangleleft i \cdot i = -1$  – spor. Když  $i \triangleleft 0$ , tak  $0 \triangleleft -i$  a máme  $0 \triangleleft -i \cdot -i = -1$  – spor.

## E.2.7. Elementární problematika modelů teorií.

## 1.

- a) Existuje spočetný model teorie  $T$  vektorových prostorů nad tělesem reálných čísel?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Je-li  $\mathcal{A} \models T$  obsahující nenulový prvek  $a$ , je zobrazení  $h : \mathbb{R} \rightarrow A$ , kde  $h(r) = ra$ , prosté, tudíž  $|\mathbb{R}| \leq |A|$ .  $\mathbb{R}$  je nespočetná množina, tedy  $A$  je nutně nespočetná.

## 2.

- a) Je každá podstruktura tělesa  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  racionálních čísel těleso?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Např. podstruktura  $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$  není těleso.
- b) Je každá podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  teorie DeLO modelem teorie DeLO?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Např. podstruktura, vzniklá vynecháním nějakého otevřeného nekonečného intervalu s koncem v  $A$  není model DeLO.
- c) Je každá podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  teorie DiLO modelem teorie DiLO?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Např. konečná podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  není model DiLO.
- d) Je každá podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  teorie BA modelem teorie BA?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Teorie BA je axiomatizovaná bezkvantifikátorovými formullemi.
- e) Je každá podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  teorie  $VS(F)$  vektorových prostorů nad tělesem  $F$  modelem teorie  $VS(F)$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Teorie  $VS(F)$  je axiomatizovaná bezkvantifikátorovými formullemi.
- f) Je každá podstruktura modelu  $\mathcal{A}$  teorie aBA atomárních Booleových algeber modelem teorie aBA?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Např. potenční algebra  $\mathbb{N}_2$  je atomární, její podalgebra s univerzem tvořeným funkcemi s nějakou nenulovou periodou  $p \in \mathbb{N}$ , tj. algebra  $\underline{C}_\infty$ , není atomární (je bezatomární).

## 3.

- a) Necht každý axiom teorie  $T$  je atomická formule. Má  $T$  model?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Má jistě jednoprvkový model, neboť v jednoprvkové  $L(T)$ -strukturu s  $R^A = A^{\text{ar}(R)}$  pro každý mimologický relační symbol jazyka  $L(T)$ , každá atomická formule platí.
- b) Necht každý axiom teorie  $T$  je atomická formule. Musí mít  $T$  alespoň dvouprvkový model?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Např.  $T = \{F(v_0) = v_1\}$ , kde  $F$  je unární funkční symbol, má jen jednoprvkové modely.
- c) Necht každý axiom teorie  $T$  je atomická formule tvaru  $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ , kde žádný term  $t_i$  není proměnná a  $R$  může být  $=$ . Buď  $A \neq \emptyset$ . Existuje model teorie  $T$  s univerzem  $A$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Buď totiž  $b \in A$  pevné. Buď  $\mathcal{A}$  struktura s univerzem  $A$ , s  $R^A = A^{\text{ar}(R)}$  pro každý mimologický relační symbol jazyka  $L(T)$  a s  $F^A = A^{\text{ar}(F)} \times \{b\}$  pro každý mimologický funkční symbol jazyka  $L(T)$ . Pak  $\mathcal{A} \models T$ , neboť pro každé  $e : \text{Var} \rightarrow A$  je  $t^A[e] = b$  a tedy  $R^A(t_0^A[e], \dots)$  platí pro každý mimologický relační symbol jazyka  $L(T)$  a termy  $t_0, \dots$ .
- d) Popište všechny modely teorie  $T$  v jazyce  $\langle F \rangle$  s rovností, přičemž  $F$  je unární funkční symbol a axiomatika  $T$  je  $\{F(v_0) = v_1\}$ .  
 ŘEŠENÍ. Jsou to právě struktury  $\langle A, \text{Id}_A \rangle$  s jednoprvkovým  $A$ .

4.

- a) Buď  $L = \langle R \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $R$  je  $n$ -ární relační symbol. Pro která  $n$  jsou právě 2 spočetné elementárně neekvivalentní  $L$ -struktury.  
 ŘEŠENÍ. Právě pro  $n = 0$ . Pro  $n > 0$  máme např. tyto 3 elementárně neekvivalentní spočetné  $L$ -struktury:  $\langle \mathbb{N}, \emptyset \rangle$ ,  $\langle \mathbb{N}, \mathbb{N}^n \rangle$ ,  $\langle \mathbb{N}, \{ \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle \} \rangle$ .
- b) Buď  $L = \langle R \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $R$  je  $n$ -ární relační symbol a  $T$  buď  $L$ -teorie s rovností s jediným axiomem:  
 $(\exists x_0, \dots, x_{n-1})(\neg R(x_0, \dots, x_{n-1})) \ \& \ (\forall y_0, \dots, y_{n-1})(\neg R(y_0, \dots, y_{n-1}) \rightarrow \bigwedge_{i < n} x_i = y_i)$ .  
 Kolik má  $T$  neizomorfních modelů na dané alespoň  $n$  prvkové množině  $A \neq \emptyset$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě  $B(n)$ , kde  $B(n)$  je  $n$ -té Bellovo číslo, udávající počet rozkladů  $n$ -prvkové množiny. Pro  $\mathcal{A} = \langle A, R^A \rangle \models T$  buď  $d^A \in A^n$  jediný prvek, nepatřící do  $R^A$  a  $E_A = \{ \langle i, j \rangle \in n \times n; d_i^A = d_j^A \}$ . Buď  $\mathcal{B} = \langle B, R^B \rangle \models T$  s  $B = A$ . Zřejmě  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow E_A = E_B$ . Protože na  $n$  je  $B(n)$  rozkladů, jsme hotovi.

### E.2.8. Izomorfismus struktur.

#### 1. Jazyk jedné unární relace.

Buď  $L = \langle U \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $U$  je unární relační symbol.

- a) Buďte  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  spočetné modely jazyka  $L$ . Právě kdy je  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě když  $|U^A| = |U^B|$  a  $|A - U^A| = |B - U^B|$ .
- b) Buď  $\mathcal{A}$  spočetný model jazyka  $L$ . Právě kolik je různých podstruktur  $\mathcal{A}$ , izomorfních s  $\mathcal{A}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě kontinuum. Alespoň jedna z množin  $U^A, A - U^A$  je totiž spočetná a každá její spočetná podmnožina určuje nějakou podstrukturu  $\mathcal{A}$ , izomorfní s  $\mathcal{A}$ . Takových podmnožin je kontinuum, tudíž uvažovaných podstruktur je alespoň kontinuum a tedy kontinuum, neboť je jich nejvýše kontinuum.

#### 2. Lineární uspořádání.

- a) Právě kolik automorfizmů má konečný model teorie lineárního uspořádání.  
 ŘEŠENÍ. Právě jeden. Plyne to jasně indukcí podle počtu prvků univerza.
- b) Právě kolik automorfizmů má uspořádání  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  přirozených čísel?  
 ŘEŠENÍ. Právě jeden. Je-li  $h$  automorfizmus  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ , indukcí plyne, že  $h(n) = n$ .
- c) Právě kolik automorfizmů má uspořádání  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  celých čísel?  
 ŘEŠENÍ. Právě spočetně mnoho. Každé zobrazení  $\{ \langle a, b \rangle \}$ , kde  $a, b \in \mathbb{Z}$ , lze jednoznačně rozšířit do automorfizmu  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ .

- d) Právě kolik automorfizmů má uspořádání  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  racionálních čísel?

ŘEŠENÍ. Právě kontinuum. Pro  $f \in {}^{\mathbb{N}}2$ , tj.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ , buď  $h_f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  definovaná takto:  $h_f$  je identita na intervalu  $(-\infty, 0)$  a na intervalu  $[i, i+1)$ , pokud  $f(i) = 0$  a je to funkce  $g(x) = i + (x-i)^2$  na intervalu  $[i, i+1)$ , pokud  $f(i) = 1$ . Je to funkce rostoucí, zobrazující  $\mathbb{Q}$  na  $\mathbb{Q}$ , tedy i automorfizmus  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ . Zobrazení  $f \mapsto h_f$  je prosté zobrazení. Protože velikost  ${}^{\mathbb{N}}2$  je kontinuum, je uvažovaných automorfizmů alespoň kontinuum; jelikož jich je zároveň nejvýše kontinuum, jsme hotovi.

### 3. Teorie hustého lineárního uspořádání.

Teorie hustého lineárního uspořádání se značí DeLO\*, její extenze DeLO o axiom „neexistuje ani nejmenší ani největší prvek“ je teorie hustého lineárního uspořádání bez konců.

- a) Každé dva spočetné modely teorie DeLO, jsou izomorfní. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Nechť  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou spočetné modely DeLO. Je-li  $h \subseteq A \times B$  konečné zobrazení takové, že

$$a, b \in \text{dom}(h) \Rightarrow a \leq^A b \Leftrightarrow h(a) \leq^B h(b), \quad (1)$$

existuje pro každé  $a \in A$  nějaké  $b \in B$  tak, že pro  $h' = h \cup \{(a, b)\}$  platí (1) s  $h'$  místo  $h$ ; říkáme, že  $h'$  je bezprostřední rozšíření  $h$  do  $a$ . Buď  $\langle a_n \rangle_{\mathbb{N}}$  resp.  $\langle b_n \rangle_{\mathbb{N}}$  prosté očíslování  $A$  resp.  $B$ . Vycházejíce z  $h = \emptyset$  můžeme nyní indukci přes  $\mathbb{N}$  sestrojít metodou cik-cak a užitím poznatku o bezprostředním rozšíření hledaný izomorfizmus.

- b) Právě kdy jsou dva spočetné modely teorie DeLO\* hustého spočetného lineárního uspořádání izomorfní? Návod: Každé dva spočetné modely teorie DeLO jsou izomorfní.

ŘEŠENÍ. Právě když oba mají zároveň největší resp. nejmenší prvek. To plyne z faktu, že každé dva spočetné modely teorie DeLO jsou izomorfní.

- c) Buď  $\mathcal{A}$  spočetný model teorie DeLO,  $X \subseteq A$  konečná množina. Je  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \upharpoonright (A - X)$ ?

ŘEŠENÍ. Ano.  $\mathcal{A} \upharpoonright (A - X)$  je spočetný model DeLO.

- d) Buď  $T$  extenze teorie DeLO o konstantní symbol  $c$  a žádné nové mimologické axiomy. Jsou každé dva spočetné modely teorie  $T$  izomorfní?

ŘEŠENÍ. Ano. Nechť  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou spočetné modely  $T$ . Vycházejíce z  $h = \{\langle c^A, c^B \rangle\}$  můžeme indukci přes  $\mathbb{N}$  metodou cik-cak, rozšiřující „konečný fragment“ hledaného izomorfizmu na další jeden prvek, sestrojít hledaný izomorfizmus.

- e) Buď  $T$  extenze teorie DeLO o dva konstantní symboly  $c, d$  a žádné nové mimologické axiomy. Jsou každé dva spočetné modely teorie  $T$  izomorfní?

ŘEŠENÍ. Ne. Platí-li v jednom modelu  $c \neq d$  a v jiném  $c = d$ , nemohou být izomorfní.

- f) Která tvrzení platí?

- i)  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$  je model DeLO.
- ii)  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R} - \{0\}, \leq \rangle$  je model DeLO.
- iii)  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

ŘEŠENÍ.

- i) Platí. Je to model hustého lineárního uspořádání bez konců.
- ii) Platí. Je to model hustého lineárního uspořádání bez konců.
- iii) Neplatí. Omezená množina  $X = \{a \in \mathbb{R}; a < 0\}$  nemá v  $\mathcal{B}$  supremum. Kdyby existoval izomorfizmus  $h$  struktury  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{A}$ , byl by obraz  $h[X]$  omezená množina která nemá supremum. Avšak v  $\mathcal{A}$  má každá omezená množina supremum – spor.

### 4. Přičítání jedničky – struktury $\mathbb{J}_n(0)$ .

$\mathbb{J}_n(0) = \langle \mathbb{J}_n, S_n, \langle 0, 0 \rangle \rangle$  je struktura pro jazyk  $\langle S, 0 \rangle$ , přičemž  $n \in \mathbb{N}$  nebo  $n = \omega$  a

$$\mathbb{J}_n = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup \bigcup_{0 < i \leq n} (\{i\} \times \mathbb{Z}) \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{J}_\omega = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup \bigcup_{0 < i \in \mathbb{N}} (\{i\} \times \mathbb{Z}).$$

$$S_n(\langle i, a \rangle) = \langle i, a + 1 \rangle.$$

- a) Pro  $n < m$  je  $\mathbb{J}_n(0) \not\cong \mathbb{J}_m(0)$ . Dokažte.

ŘEŠENÍ. Buď  $h$  izomorfizmus  $\mathbb{J}_n(0)$  a  $\mathbb{J}_m(0)$ ; označme  $h(\langle i, 0 \rangle)$  jako  $\langle i^*, i(0) \rangle$ . Nutně pro  $i, j < n$  s  $i \neq j$  je  $i^* \neq j^*$ . (Jinak totiž  $i^* = j^*$  a (bez újmy na obecnosti)  $i(0) < j(0)$ , tudíž i  $S_n^k(h(\langle i, 0 \rangle)) = h(\langle j, 0 \rangle)$  pro nějaké  $k > 0$  přirozené; avšak není  $S_n^k(\langle i, 0 \rangle) = \langle j, 0 \rangle$ .) Tudíž  $n \leq m$ . Ze stejných důvodů je  $m \leq n$ .

- b) Existuje vlastní podstruktura struktury  $\mathbb{J}_\omega(0)$ , izomorfní s  $\mathbb{J}_\omega(0)$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Např.  $\mathbb{J}_\omega(0) \upharpoonright B$ , kde  $B = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup \bigcup_{1 < i < \omega} (\{2i\} \times \mathbb{Z})$ .
- c) Existuje podstruktura struktury  $\mathbb{J}_\omega(0)$ , která není izomorfní s žádnou strukturou  $\mathbb{J}_n(0)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Např. podstruktura  $\mathcal{B}$  s univerzem  $B = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1\} \times \{a \in \mathbb{Z}; a \geq 0\})$ . V  $\mathcal{B}$  jsou 2 prvky bez předchůdce, avšak v  $\mathbb{J}_\omega(0)$ ; tedy  $\mathbb{J}_\omega(0) \not\cong \mathcal{B}$ .
- d) Buď  $n \in \mathbb{N}$ . Právě kolik automorfizmů má  $\mathbb{J}_n(0)$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě spočetně. Každý uvažovaný automorfizmus je dán permutací množiny  $1, 2, \dots, n$  a automorfizmem  $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ ; těch je spočetně. Jde tedy o velikost množiny získané sjednocením  $n!$  spočetných množin a taková množina má velikost spočetně.
5. Vektorové prostory.
- a) Právě kdy jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem izomorfní?  
 ŘEŠENÍ. Právě když mají tutéž dimenzi. Izomorfismus totiž převede bázi na bázi. Naopak jednoznačné zobrazení báze jednoho prostoru na bázi druhého lze pomocí lineárních kombinací jednoznačně rozšířit do izomorfismu uvažovaných prostorů.
- b) Právě kolik je až na izomorfismus spočetných modelů teorie vektorových prostorů nad tělesem racionálních čísel?  
 ŘEŠENÍ. Právě spočetně mnoho. Jsou v jednoznačné korespondenci s možnými dimenzemi, což jsou čísla z  $\mathbb{N}$  a ještě spočetná velikost; je jich celkem spočetně.
- c) Právě kolik je až na izomorfismus podstruktur vektorového prostoru nad daným tělesem, který má dimenzi  $n \in \mathbb{N}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě  $n + 1$ . Právě tolik je dimenzí podprostorů uvažovaného prostoru.

### E.2.9. Generované podstruktury.

Podstruktura struktury  $\mathcal{A}$ , generovaná množinou  $X \subseteq A$  se značí  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ . Je-li  $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ , píše se také  $\mathcal{A}\langle a_0, \dots, a_n \rangle$  místo  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

- 1.
- Buď  $\mathcal{A} \models \text{VS}(F)$ , kde  $F$  je těleso.
- a) Popište  $\mathcal{A}\langle 0 \rangle$ .  
 ŘEŠENÍ.  $\mathcal{A}\langle 0 \rangle$  je podprostor vektorového prostoru  $\mathcal{A}$  dimenze 0; má univerzum  $\{0\}$ .
- b) Buď  $X \subseteq A$  nezávislá množina vektorů. Popište  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .  
 ŘEŠENÍ.  $\mathcal{A}\langle X \rangle$  je podprostor vektorového prostoru  $\mathcal{A}$  s bází  $X$ .
- 2.
- a) Buď  $\mathbb{N}$  standardní model aritmetiky,  $a \in \mathbb{N}$ . Popište  $\mathbb{N}\langle a \rangle$ .  
 ŘEŠENÍ.  $\mathbb{N}\langle a \rangle = \mathbb{N}$ . Je 0 v univerzu struktury  $\mathbb{N}\langle a \rangle$  a tedy pro  $n \in \mathbb{N}$  je  $n = S^n 0$  v univerzu struktury  $\mathbb{N}\langle a \rangle$ .
- b) Buď  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ .
- i) Popište univerzum  $A$  struktury  $\mathcal{A} = \mathbb{J}_n(0)\langle a \rangle$ , kde  $a = \langle 1, 0 \rangle$ .  
 ii) Je  $\mathcal{A}$  model  $\text{SC}_0^-$ ?  
 ŘEŠENÍ.  
 i)  $A = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1\} \times \mathbb{N})$ .  
 ii) Ne. Prvek  $\langle 1, 0 \rangle$  není tvaru  $Sa$  v  $\mathcal{A}$ .
- c) Buď  $2 \leq n \in \mathbb{N}, 0 < m \in \mathbb{N}$ .
- i) Popište univerzum  $A$  struktury  $\mathcal{A} = \mathbb{K}_m^n(0)\langle a \rangle$ , kde  $a = \langle 2, 0 \rangle$ .  
 ii) Je  $\mathcal{A}$  model  $\text{SC}_0^-$ ?  
 ŘEŠENÍ.  
 i)  $A = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{2\} \times \mathbb{Z}_m)$ .  
 ii) Ano.

**E.2.10. Struktura  $\langle \mathbb{R}, | \cdot | \rangle$ .**

Bud'  $L = \langle F \rangle$  jazyk s rovností, přičemž  $F$  je unární funkční symbol. Bud'  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, | \cdot | \rangle$  struktura pro  $L$ , kde  $\mathbb{R}$  jsou reálná čísla a  $| \cdot |$  absolutní hodnota na  $\mathbb{R}$ .

**1. Definovatelné množiny**

a) Existuje formule v proměnné  $x$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů interval  $(-\infty, 0)$  reálných čísel.

ŘEŠENÍ. Ano. Je to formule  $x \neq F(x)$  a také  $(\forall y)(x \neq F(y))$ .

b) Existuje formule v proměnné  $x$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů množinu  $\{0\}$ ?

ŘEŠENÍ. Ano. Je to formule  $x = F(x) \ \& \ (\forall y \neq x)(x \neq F(y))$  a také  $(\exists_{=1} y)(x = F(y))$ .

c) Existuje formule v proměnné  $x$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů interval  $(0, \infty)$ ?

ŘEŠENÍ. Ano. Je to formule  $(\exists_{=2} y)(x = F(y))$ .

d) Napište formuli  $\varphi(x, y)$  definující v  $\mathcal{A}$  bez parametrů dvojrozměrný interval

$$[0, \infty) \times (-\infty, 0).$$

ŘEŠENÍ.  $\varphi(x, y)$  je  $x = F(x) \ \& \ (y \neq F(y))$ .

**2. Podstruktury.**

a) Bud'  $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ . Právě kdy je  $B$  univerzum podstruktury  $\mathcal{A}$ ?

ŘEŠENÍ. Právě když

$$a \in B \text{ a } a < 0 \Rightarrow -a \in B;$$

právě tehdy je totiž  $B$  uzavřeno na  $| \cdot |$ .

b) Bud'  $\emptyset \neq B \subseteq \{a \in \mathbb{R}; a > 0\}$ . Platí  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \upharpoonright B$ ?

ŘEŠENÍ. Ne. V  $\mathcal{A}$  platí  $(\exists x)(x \neq F(x))$ , avšak v  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  nikoli.

c) Bud'  $0 < r \in \mathbb{R}$ ,  $B_0$  interval  $[0, r)$  reálných čísel,  $B_1$  interval  $(-r, r)$  reálných čísel. Platí  $\mathcal{A} \upharpoonright B_0 \equiv \mathcal{A} \upharpoonright B_1$ ?

ŘEŠENÍ. Ne. Sentence  $(\forall x)(x = F(x))$  platí v  $\mathcal{A} \upharpoonright B_0$ , neplatí v  $\mathcal{A} \upharpoonright B_1$ .

**3. Automorfizmy.**

a) Bud'  $h$  automorfismus  $\mathcal{A}$ . Dokažte, že platí:

i)  $h$  prostě zobrazuje intervalu  $[0, \infty)$  reálných čísel na sebe (a tedy  $(-\infty, 0)$  na sebe).

ii)  $h(0) = 0$ ,

iii)  $h(-a) = -h(a)$  pro  $a > 0$ .

ŘEŠENÍ.

i) Pro  $a \geq 0$  je  $h(a) = h(|a|) = |h(a)| \geq 0$ . Tedy  $h$  prostě zobrazuje  $[0, \infty)$  do sebe. Také však na  $[0, \infty)$ , neboť pro  $a \in [0, \infty)$  je  $b = h^{-1}(a) \in [0, \infty)$  (díky již dokázanému a tomu, že  $h^{-1}$  je automorfismus  $\mathcal{A}$ ) a  $a = h(b)$ .

ii) Když  $h(a) = 0$ , je  $a \geq 0$  a tedy užitím i) máme

$$0 = h(a) = h(|-a|) = |h(-a)| = -h(-a);$$

nutně tedy  $a = 0$ .

iii) Pro  $a > 0$  je

$$h(a) = h(|-a|) = |h(-a)| \text{ (neboť } h \text{ je izomorfismus)} = -h(-a) \text{ (neboť } h(-a) < 0).$$

b) Nechť  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazuje prostě interval  $(0, \infty)$  reálných čísel na sebe,  $h(0) = 0$  a pro  $a > 0$  je  $h(-a) = -h(a)$ . Pak je  $h$  automorfismus  $\mathcal{A}$ . Dokažte to.

ŘEŠENÍ. Zobrazení  $h$  je prosté a na  $\mathbb{R}$ . Zbývá dokázat, že pro každé  $a \in \mathbb{R}$  platí:  $h(|a|) = |h(a)|$ . Pro  $a \geq 0$  to je jasné. Pro  $a < 0$  tvaru  $-b$  máme  $h(|a|) = h(|-b|) = h(b) = -h(-b) = |h(-b)|$  díky tomu, že  $h(-b) < 0$ .

c) Množina  $D \subseteq \mathbb{R}$  buď neprázdná a definovaná v  $\mathcal{A}$  bez parametrů. Dokažte, že  $D$  je sjednocením některých z těchto 3 množin:

$$\text{interval } (-\infty, 0), \{0\}, \text{interval } (0, \infty).$$

ŘEŠENÍ. Bud'  $D \subseteq \mathbb{R}$  definovatelná v  $\mathcal{A}$  bez parametrů. Platí: pro každé  $(a > 0 \text{ a } b > 0)$  resp.  $(a < 0 \text{ a } b < 0)$  existuje automorfismus  $h$  struktury  $\mathcal{A}$  s  $h(a) = b$ . Tudíž: obsahuje-li  $D$  prvek  $a > 0$ , je  $(0, \infty) \subseteq D$ , obsahuje-li  $D$  prvek  $a < 0$ , je  $(-\infty, 0) \subseteq D$ . Odtud plyne ihned tvrzení.

### E.2.11. Přičítání jedničky; teorie $SC_0^-$ , $SC_0$ .

Teorie  $SC_0^-$  je v jazyce  $\langle S, 0 \rangle$  s rovností, přičemž  $S$  je nulární funkční symbol,  $0$  je konstantní symbol a její axiomy jsou:

$$(Q1) \ 0 \neq Sx, \quad (Q2) \ Sx = Sy \rightarrow x = y, \quad (Q7) \ x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(Sy = x).$$

Teorie  $SC_0$  (následníka s nulou) je extenze  $SC_0^-$  o schema  $\{x \neq S^m x; 0 < m \in \mathbb{N}\}$ .

1.

a) Buď  $n \in \mathbb{N}$ . Platí  $\mathbb{J}_n(0) \models SC_0^- \cup \{x \neq S^m x; 0 < m \in \mathbb{N}\}$ ?

ŘEŠENÍ. Ano.

b) Buď  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \in \mathbb{N}$ . Platí  $\mathbb{K}_n^m(0) \models SC_0^- \cup \{x = S^m x\} \cup \{x \neq S^i x; 0 < i < m\}$ ?

ŘEŠENÍ. Ne.  $\mathbb{K}_n^m(0) \not\models (x = S^m x) \{ \{0\} \times 0 \}$ .

2.

a) Buď  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \in \mathbb{N}$ . Existuje podstruktura struktury  $\mathbb{K}_n^m(0)$ , která je modelem  $SC_0$ ?

ŘEŠENÍ. Ano. Je to podstruktura  $\mathbb{K}_0^m(0) (= \mathbb{J}_0(0) \cong \langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle)$ .

b) Buď  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \in \mathbb{N}$ . Je  $\mathbb{J}_0(0)$  definovatelné v  $\mathbb{K}_n^m(0)$  bez parametrů?

ŘEŠENÍ. Ano. Formulí  $x \neq S^m x$ .

### E.2.12. Modely teorií UFO a $CE_\omega$ .

1. UFO.

a)

- i) Popište teorii  $UFO^m$  s  $0 < m \in \mathbb{N}$ .
- ii) Uveďte model teorie  $UFO^{16}$  velikosti 112.
- iii) Uveďte model teorie  $UFO^9$  velikosti 1000.

ŘEŠENÍ.

i)  $UFO^m$  je v jazyce  $\langle F \rangle$  s rovností a unárním funkčním symbolem  $F$ . Axiomy jsou:  
 $F^m(x) = x$ ,  $F^i(x) \neq x$  pro  $0 < i < m$ .

ii)  $\mathbb{O}_7^{16}$ .

iii) Neexistuje, neboť velikost konečného modelu  $UFO^m$  je dělitelná  $m$  pro  $0 < m \in \mathbb{N}$ .

b) Uveďte, jak nějaký model teorie  $UFO^m$  určuje graf, který je orientovanou kružnicí délky  $l$ .

ŘEŠENÍ.  $\mathbb{O}^l = \langle A, F \rangle$  určuje uvažovaný graf jako  $\langle A, R \rangle$ , kde  $R(a, b) \Leftrightarrow F(a) = b$  pro  $a \in A$ .

c)

- i) Popište teorii  $UFO_m$  s  $0 < m \in \mathbb{N}$ .
- ii) Je  $\mathbb{O}^2 + \mathbb{O}^3 \models UFO_6$ ?
- iii) Má  $UFO_6$  model každé nenulové velikosti  $\kappa$ ?

ŘEŠENÍ.

i)  $UFO_m$  je v jazyce  $\langle F \rangle$  s rovností a unárním funkčním symbolem  $F$ . Axiomatika:  
 $F^m(x) = x$ .

ii) Ano.

iii) Ano. Má model  $\mathbb{O}_\kappa^1$ , který je velikosti  $\kappa$ .

d) Buď  $T$  extenze teorie  $UFO_{15}$  o axiom  $F(x) \neq x$ .

- i) Určete všechna  $k$  s  $0 < k \leq 10$  taková, že  $T$  nemá model velikosti  $k$ .
- ii) Jsou každé dva modely teorie  $T$  velikosti 18 elementárně ekvivalentní?

ŘEŠENÍ.

i) 1, 2, 4, 7, neboť  $T$  má model konečné velikosti, právě když je tato tvaru  $3i + 5j$  pro nějaká  $i, j \in \mathbb{N}$ .

ii) Ne. Modely  $\mathbb{O}^{15} + \mathbb{O}^3$  a  $\mathbb{O}_6^3$  teorie  $T$  mají velikost 18, nejsou elementárně ekvivalentní. V prvním neplatí  $(\forall x)(F^3(x) = x)$ , ve druhém to platí.

2. Teorie  $CE_\omega$ .

Je to prázdná teorie v jazyce  $\langle c_i \rangle_{i \in \omega}$  s rovností, kde  $c_i$  jsou konstantní symboly.

Buď  $T$  teorie  $CE_\omega$ .

- a) Pomocí vhodných ekvivalencí na  $\mathbb{N}$  vyjádřete, právě kdy jsou dva modely  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  teorie  $T$  velikosti 2 izomorfní a určete  $I(2, T)$ .  
 ŘEŠENÍ. Buď  $E_A = \{\langle i, j \rangle; c_i^A = c_j^A\}$  ekvivalence na  $\mathbb{N}$  s nejvýše dvěma faktory. Pak  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow E_A = E_B$ . Protože ekvivalencí na  $\mathbb{N}$  s nejvýše dvěma faktory je právě kontinuum  $2^\omega$ , je  $I(2, T) = 2^\omega$ .
- b) Buď  $\mathcal{A} \models T$ ,  $|A| = 2$ . Kolik je modelů  $\mathcal{B} \models T$  s  $B = A$ , izomorfních s  $\mathcal{A}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Právě 2. Je  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow E_A = E_B$ , kde  $E_A = \{\langle i, j \rangle; c_i^A = c_j^A\}$  je ekvivalence na  $\mathbb{N}$  s nejvýše dvěma faktory. Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, c_i^B \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  s  $E_B = E_A$  je určena právě nějakým prostým zobrazením  $f: \mathbb{N}/E_A \rightarrow B$ , a to takto:  $c_i^B = f(i/E_A)$ . Zobrazení  $f$  jsou právě dvě, tudíž uvažované  $\mathcal{B}$  jsou právě dvě.
- c) Buď  $T'$  jednoduchá extenze teorie  $T$  o axiomy  $c_i \neq c_j$  s  $i < j \in \mathbb{N}$ . Určete  $I(\omega, T')$ .  
 ŘEŠENÍ.  $I(\omega, T') = \omega$ . Jsou-li  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  spočetné modely teorie  $T'$ , zřejmě  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow |A - \{c_i^A; i \in \mathbb{N}\}| = |B - \{c_i^B; i \in \mathbb{N}\}|$  a nejvýše spočetných velikostí je právě spočetně.

### E.2.13. Elementární podstruktury.

1.

- a) Buď  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \models T$ . Je  $\mathcal{A} \models T$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano, neboť speciálně  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .
- b) Buď  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ . Je  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ne. Buď  $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle B, \leq \rangle$ , kde  $A$  resp.  $B$  je reálný interval  $[1/2, 1)$  resp.  $[0, 1)$  a  $\leq$  obvyklé uspořádání na něm. Pak  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ , ale není  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- c) Buď  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}_A \equiv \mathcal{B}_A$ . Je pak  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ? ( $\mathcal{A}_X$  je expanze  $\mathcal{A}$  o jména prvků z  $X$  pro  $X \subseteq A$ ).  
 ŘEŠENÍ. Ano. Pro formuli  $\varphi(\bar{x})$  jazyka  $L$  struktury  $\mathcal{A}$  a  $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$  máme:  

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A}_A \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B}_A \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}].$$
 Přitom prvou a třetí  $\Leftrightarrow$  dává tvrzení o jménech, druhou  $\Leftrightarrow$  pak předpoklad  $\mathcal{A}_A \equiv \mathcal{B}_A$ .

2.

- a) Buď  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \upharpoonright (\mathbb{N} - n)$ . Která tvrzení platí:  
 i)  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .  
 ii)  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ .  
 ŘEŠENÍ.  
 i) Ano. Via  $i \mapsto i + n$  pro  $i \in \mathbb{N}$ .  
 ii) Ne.  $n$  je nejmenší v  $\mathcal{B}$ , nikoli však v  $\mathcal{A}$ .
- b) Buď  $\mathcal{A} = \langle 3, R \rangle$  s  $R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$  tříprvkový graf s orientací bez smyček,  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \upharpoonright \{0, 1\}$ . Je  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ne. V  $\mathcal{A}$  platí „existují dva různé prvky nespojené hranou“, což neplatí v  $\mathcal{B}$ ; tedy  $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$  a tedy není  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ .
- c) Buď  $\mathcal{A} \subseteq \langle \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}, \leq \rangle$ ,  $\mathcal{A} \models \text{DeLO}^-$ . Je  $\mathcal{A}$  elementární podstruktura  $\langle \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}, \leq \rangle$ ?  
 ŘEŠENÍ. Nemusí být. Např. není s  $A = \{a \in \mathbb{Q}; 0 \leq a\}$ , neboť 0 je nejmenší v  $\mathcal{A}$ , nikoli však v  $\langle \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}, \leq \rangle$ .
- d) Existuje podstruktura  $\mathcal{A}$  struktury  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq \rangle$ , která je elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{B}$  a není to elementární podstruktura  $\mathcal{B}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Např. když  $A$  je interval  $(0, 1]$ , metodou cik-cak snadno prokážeme, že  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Není však  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ , neboť prvek 1 je největší v  $\mathcal{A}$ , nikoli však v  $\mathcal{B}$ .

**Témata.**

Elementární teorie dokazování.  
 Normální tvary a modely výroku.  
 Počty neekvivalentních pravdivých a lživých výroků nad konečně prvovýroky.  
 Výrokové spojky a jejich vlastnosti.  
 Počty neekvivalentních teorií nad konečně prvovýroky.  
 Axiomatizovatelnost.  
 Rezoluce.

**Konvence.**

$\mathbb{P}$  značí množinu prvovýroků,  $p, q, r$  případně s indexy pak prvovýroky. Je-li  $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$ , zapisujeme  $v \in {}^{\mathbb{P}}2$  též jako  $\langle v(p_0), v(p_1), \dots \rangle$ . Tudíž např. když  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , jsou v takovém zápise prvky  ${}^{\mathbb{P}}2$  právě  $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$ .

**E.3.1. Elementární teorie dokazování.****1.**

- a) Dokažte  $T \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow T \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$  pomocí věty o dedukci.  
 ŘEŠENÍ. Věta o dedukci z  $T \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  dá  $T \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi$  a pak i  $T \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ .
- b) Dokažte  $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$  jen pomocí věty o dedukci.  
 ŘEŠENÍ.  $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  dle (PL1), z věty o dedukci  $\neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ . Odtud, užitím (PL3) a modus ponens získáme  $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$  a užitím věty o dedukci  $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$  a odtud užitím věty o dedukci  $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$  a  $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ .

**2.**

- a) Nechť  $T, \neg\varphi \vdash \neg(\psi \rightarrow \psi)$ . Platí  $T \vdash \varphi$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano.  $\neg(\psi \rightarrow \psi)$  je spor (neboť  $\vdash \psi \rightarrow \psi$ ), tudíž  $T, \neg\varphi$  je sporná a dle tvrzení o důkazu sporem je  $T \vdash \varphi$ .
- b) Nechť  $T \not\vdash \varphi$ . Je  $T, \neg\varphi$  bezesporná?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Plyne to ihned z tvrzení o důkazu sporem:  $T, \neg\varphi$  je sporná  $\Leftrightarrow T \vdash \varphi$ .

**E.3.2. Normální tvary a modely výroku.****1.**

- a) Buď  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$  trojprvková množina všech prvovýroků a  $\chi$  výrok  
 $(p \vee \neg q) \& (r \rightarrow p)$ .
- Ekvivalentními úpravami najdete DNF a CNF výroku  $\chi$ .
  - Najděte  $\neg M^{\mathbb{P}}(\chi)$ .
  - Pomocí  $\neg M^{\mathbb{P}}(\chi)$  najdete CNF výroku  $\chi$ .
- ŘEŠENÍ.
- $\chi \sim (p \vee \neg q) \& (p \vee \neg r)$  díky  $(r \rightarrow p) \sim (p \vee \neg r)$ .  $(p \vee \neg q) \& (p \vee \neg r)$  je CNF výroku  $\chi$ . Vytknutím  $p$  získáme  $\chi \sim p \vee (\neg q \& \neg r)$  a máme DNF výroku  $\chi$ .
  - Např. pomocí DNF výroku  $\chi$  vidíme, že  $v \in \neg M^{\mathbb{P}}(\chi) \Leftrightarrow v(p) = 0$  a ( $v(q) = 1$  nebo  $v(r) = 1$ ), tedy  $\neg M^{\mathbb{P}}(\chi) = \{\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle\}$ .
  - Obecně je  $\bigwedge_{w \in -K} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{-1w(p)}$  konjunktivně normální forma výroku  $\varphi$  nad  $\mathbb{P}$ , kde  $-K = {}^{\mathbb{P}}2 - M^{\mathbb{P}}(\varphi)$ . Hledaná CNF je tedy  
 $(p \vee q \vee \neg r) \& (p \vee \neg q \vee r) \& (p \vee \neg q \vee \neg r)$ .

b) Buď  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$  trojprvková množina všech prvovýroků a  $\chi$  výrok

$$(p \rightarrow \neg q) \& (\neg p \rightarrow q) \& r.$$

- i) Ekvivalentními úpravami najděte DNF výroku  $\chi$ .
- ii) Najděte množinu  $M^{\mathbb{P}}(\chi)$ .
- iii) Kolik modelů nad čtyřprvkovou množinou  $\{p, q, r, s\}$  prvovýroků má  $\chi$ ?

ŘEŠENÍ.

- i) DNF výroku  $\chi$  je  $(p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& r)$ . Postup nalezení:  
 $(p \rightarrow \neg q) \& (\neg p \rightarrow q) \& r \sim (\neg p \vee \neg q) \& (p \vee q) \& r$   
 $\sim (((\neg p \vee \neg q) \& p) \vee ((\neg p \vee \neg q) \& q)) \& r$   
 $\sim ((p \& \neg q) \vee (\neg p \& q)) \& r \sim (p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& r)$

Užilo se tvrzení o ekvivalenci a „booleovská pravidla“.

- ii)  $M^{\mathbb{P}}(\chi) = \{\langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle\}$ .
  - iii) Právě 4. Získají se z modelů z  $M^{\mathbb{P}}(\chi)$  libovolným rozšířením hodnotou 0 či 1 do  $s$ .
- c) Buď  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$  trojprvková množina všech prvovýroků a  $\chi$  výrok

$$\neg(p \& q) \& (p \vee q) \& r.$$

- i) Ekvivalentními úpravami najděte DNF výroku  $\chi$ .
- ii) Najděte množinu  $M^{\mathbb{P}}(\chi)$ .
- iii) Kolik je neekvivalentních výroků nad  $\mathbb{P}$ , pravdivých v  $\{\chi\}$ ?

ŘEŠENÍ.

- i) DNF výroku  $\chi$  je  $(p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& r)$ .
- ii)  $M^{\mathbb{P}}(\chi) = \{\langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle\}$ .
- iii)  $2^{2^3-2} = 2^6 = 64$ . To plyne z tvrzení, že pro  $\mathbb{P}$  konečné je počet neekvivalentních výroků  $\mathbb{P}$ -teorie  $T$  roven  $2^{2^{|\mathbb{P}|}-|M(T)|}$ .

### E.3.3. Počty neekvivalentních pravdivých a lživých výroků nad konečně prvovýroky.

1.

Buď  $|\mathbb{P}| = l$  přirozené nenulové.

a) Kolik je neekvivalentních výroků nad  $\mathbb{P}$ ?

ŘEŠENÍ.  $2^{2^l}$ . Pro  $\varphi, \psi \in VF_{\mathbb{P}}$  je  $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M(\varphi) = M(\psi)$  a pro každé  $K \subseteq \mathbb{P}_2$  existuje výrok  $\varphi$  nad  $\mathbb{P}$  s  $M(\varphi) = K$ . Tudíž neekvivalentních výroků nad  $\mathbb{P}$  je právě tolik, kolik je podmnožin  $\mathbb{P}_2$ , tj. je jich  $2^{2^l}$ .

b) Dokažte:  $\mathbb{P}$ -teorie  $T$  má právě  $2^{2^l-|M(T)|}$  neekvivalentních pravdivých a také tolik lživých výroků.

ŘEŠENÍ. Pro  $\varphi \in VF_{\mathbb{P}}$  je  $T \models \varphi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi)$ . Tudíž je právě tolik neekvivalentních pravdivých výroků teorie  $T$ , kolik je podmnožin množiny  $\mathbb{P}_2 - M(T)$  a těch je  $2^{2^l-|M(T)|}$ . Lživé výroky jsou negace pravdivých, tedy jich je stejně.

2.

Buď  $|\mathbb{P}| = l$  přirozené nenulové.

a) Buď  $\varphi \in VF_{\mathbb{P}}$ . Kolik je neekvivalentních výroků  $\psi \in VF_{\mathbb{P}}$  takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ?

ŘEŠENÍ.  $2^m + 2^{2^l-m}$ , kde  $m = |M(\varphi)|$ . Je to počet množin  $K = M(\psi) \subseteq \mathbb{P}_2$  takových, že  $K \subseteq M(\varphi)$  (pro  $\psi \models \varphi$ ) nebo  $M(\varphi) \subseteq K$  (pro  $\varphi \models \psi$ ).

b) Buď  $\{\varphi, \psi\} \subseteq VF_{\mathbb{P}}$  a  $\{\varphi, \psi\}$  nemá model. Kolik je neekvivalentních pravdivých výroků teorie  $\{\varphi \vee \psi\}$ ?

ŘEŠENÍ.  $2^{2^l-(|M(\varphi)|+|M(\psi)|)}$ . Je totiž  $|M(\varphi \vee \psi)| = |M(\varphi) \cup M(\psi)| = |M(\varphi)| + |M(\psi)|$ ; poslední rovnost plyne z  $M(\varphi) \cap M(\psi) = M(\varphi \& \psi) = \emptyset$ .

### E.3.4. Výrokové spojky a jejich vlastnosti.

#### 1. Výlučná disjunkce čili XOR.

Výlučná disjunkce (XOR)  $\dot{\sim}$  je logická spojka zavedaná jako zkratka za  $(\varphi \& \neg\psi) \vee (\psi \& \neg\varphi)$ .

a) Nechť  $\sim$  značí sémantickou ekvivalenci výroků. Zdůvodněte:

- i)  $\varphi \dot{\sim} \psi \sim \psi \dot{\sim} \varphi$ .
- ii)  $\varphi \dot{\sim} \psi \sim (\varphi \vee \psi) \& \neg(\varphi \& \psi) \sim (\varphi \vee \psi) \& (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

ŘEŠENÍ. Vztahy plynou z definice  $\dot{\sim}$  a z booleovských pravidel.

b) Zdůvodněte:

- i)  $\models \varphi \dot{\sim} (\psi \dot{\sim} \chi) \leftrightarrow (\varphi \dot{\sim} \psi) \dot{\sim} \chi$ .
- ii)  $M^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{\sim} \neg\varphi) = \mathbb{P}2$ .
- iii)  $M^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{\sim} \varphi) = \emptyset$ .

ŘEŠENÍ.

- i) Plyne to propočtením pravdivostních hodnot.
- ii)  $M^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{\sim} \neg\varphi) = M^{\mathbb{P}}(\varphi \& \neg\neg\varphi) \cup M^{\mathbb{P}}(\neg\varphi \& \neg\varphi) = M^{\mathbb{P}}(\varphi) \cup M^{\mathbb{P}}(\neg\varphi) = \mathbb{P}2$ .
- iii)  $M^{\mathbb{P}}(\varphi \dot{\sim} \varphi) = M^{\mathbb{P}}(\varphi \& \neg\varphi) \cup M^{\mathbb{P}}(\neg\varphi \& \varphi) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ .

#### 2. Dualita $\vee$ a $\&$ . Výroky jen se spojkami $\vee, \&, \rightarrow$ .

a) Duální výrok  $\varphi^*$  k výroku  $\varphi$ , zapsanému jen pomocí  $\neg, \vee, \&$ , se získá z  $\varphi$  nahrazením každého výskytu prvovýroku v něm jeho negací a záměnou  $\vee$  a  $\&$ . Dokažte:

$$\models \neg\varphi \leftrightarrow \varphi^*.$$

ŘEŠENÍ. Každý uvažovaný výrok  $\varphi$  je právě výraz  $V$  daný induktivní definicí: Každý prvovýrok je výraz  $V$ . Jsou-li  $\theta, \theta'$  výrazy  $V$  jsou jimi i  $\neg\theta, \theta \vee \theta', \theta \& \theta'$ . Tvrzení plyne indukci na výrazech  $V$ . Je-li  $\varphi$  prvovýrok, platí to. Indukční krok pro  $\neg a \diamond$  plyne z toho, že  $(\neg\varphi)^*$  je  $\neg\varphi^*$  a  $(\varphi \diamond \psi)^*$  je  $\varphi^* \diamond \psi^*$  je-li  $\diamond$  buď  $\&$  nebo  $\vee$ .

b) Je-li výrok  $\varphi$  napsaný jen pomocí spojek  $\vee, \&, \rightarrow$  a  $v$  je ohodnocení identicky rovné 1, tak  $v(\varphi) = 1$ . Zdůvodněte to.

ŘEŠENÍ. Každý uvažovaný výrok  $\varphi$  je právě výraz  $V$  daný induktivní definicí: Každý prvovýrok je výraz  $V$ . Jsou-li  $\theta, \theta'$  výrazy  $V$  jsou jimi i  $\theta \vee \theta', \theta \& \theta', \theta \rightarrow \theta'$ . Tvrzení plyne indukci na výrazech  $V$ : Je-li  $\varphi$  prvovýrok, platí to. Nechť  $\varphi$  je  $\varphi_0 \diamond \varphi_1$  s  $\diamond$  rovným  $\vee, \&, \rightarrow$  a pro  $\varphi_0, \varphi_1$  nechť tvrzení platí. Pak ( $\&_1$  značí  $\wedge_1$ )  $v(\varphi) = v(\varphi_0) \diamond_1 v(\varphi_1) = 1 \diamond_1 1 = 1$ .

Důkaz indukci podle délky formule  $\varphi$ . Je-li  $\varphi$  prvovýrok, platí to. Jinak je tvar napsaný pomocí  $\vee, \&, \rightarrow$  disjunkcí, konjunkcí či implikací kratších podvýroků a dle indukčního předpokladu jasně to platí.

c) Žádný z výroků  $\neg p, \perp, \neg p \vee \neg q, p \dot{\sim} q$  není ekvivalentní výroku napsanému jen pomocí spojek  $\vee, \&, \rightarrow$ . Zdůvodněte to.

ŘEŠENÍ.  $v$  identicky rovné jedné je modelem každého výroku napsaného jen pomocí spojek  $\vee, \&, \rightarrow$ , avšak není modelem žádného z výroků  $\neg p, \perp, \neg p \vee \neg q, p \dot{\sim} q$ .

#### 3. Pierceova spojka.

Pierceova spojka  $\downarrow$  je značící „ani-ani“, je logická spojka zavedaná jako zkratka za  $\neg(\neg\varphi \rightarrow \psi)$ .

a)

- i)  $\models p \downarrow q \leftrightarrow \neg p \& \neg q$ .
- ii)  $\models p \downarrow p \leftrightarrow \neg p$ .
- iii)  $\models p \rightarrow q \leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ .

ŘEŠENÍ. Důkazy se provedou buď propočtením pravdivostních hodnot nebo pomocí „booleovských úprav“. Např. pro  $p \downarrow p$ , čili pro  $\neg(\neg p \rightarrow p)$ , máme  $\neg(\neg p \rightarrow p) \sim \neg(p \vee p) \sim \neg p$ .

b) Ukažte, že každý výrok nad  $\mathbb{P}$  je ekvivalentní výroku napsanému jen pomocí prvovýroků a  $\downarrow$ .

ŘEŠENÍ. Indukci na výrociích. Pro prvovýroky to platí. Nechť to platí pro  $\varphi$  a  $\psi$ . Protože  $\models p \downarrow p \leftrightarrow \neg p$ , platí to i pro  $\neg\psi$  a díky  $\models p \rightarrow q \leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$  to platí i pro  $\varphi \rightarrow \psi$ .

### E.3.5. Počty neekvivalentních teorií nad konečně prvovýroky.

1.

Buď  $|\mathbb{P}| = l$  přirozené nenulové.

a)

- i) Buď  $\varphi$  výrok nad  $\mathbb{P}$ . Právě kolik je neekvivalentních  $\mathbb{P}$ -teorií, které dokazují  $\varphi$ ?
- ii) Buď  $\varphi$  výrok nad  $\mathbb{P}$ . Právě kolik je neekvivalentních kompletních  $\mathbb{P}$ -teorií, které dokazují  $\varphi$ ?

ŘEŠENÍ.

- i)  $2^{|\mathbb{M}(\varphi)|}$ . Jde o neekvivalentní  $T$  s  $\mathbb{M}(T) \subseteq \mathbb{M}(\varphi)$ , tudíž jich je  $|\mathcal{P}(\mathbb{M}(\varphi))| = 2^{|\mathbb{M}(\varphi)|}$ .
- ii)  $|\mathbb{M}(\varphi)|$ . Každá uvažovaná teorie  $T$  právě splňuje  $\mathbb{M}(T) = \{v\}$  s  $v \models \varphi$  pro nějaké  $v : \mathbb{P} \rightarrow 2$ ; taková  $v$  jsou právě modely  $\varphi$  a je jich tedy  $|\mathbb{M}(\varphi)|$ .

b) Dokažte:

- i)  $\mathbb{P}$ -teorie  $T$  má právě  $|\mathbb{M}(T)|$  neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí.
- ii)  $\mathbb{P}$ -teorie  $T$  má právě  $2^{|\mathbb{M}(T)|}$  neekvivalentních jednoduchých extenzí.

ŘEŠENÍ.

- i) Pro kompletní jednoduchou extenzi  $S$  teorie  $T$  právě platí  $\mathbb{M}(S) = \{v\}$  pro nějaké  $v \in \mathbb{M}(T)$ ; takových neekvivalentních  $S$  je tedy právě  $|\mathbb{M}(T)|$ .
- ii) Pro jednoduchou extenzi  $S$  teorie  $T$  právě platí  $\mathbb{M}(S) \subseteq \mathbb{M}(T)$ ; takových neekvivalentních  $S$  je tedy právě  $|\mathcal{P}(\mathbb{M}(T))| = 2^{|\mathbb{M}(T)|}$ .

2.

Buď  $|\mathbb{P}| = l$  přirozené nenulové.

a) Buď  $\varphi$  výrok nad  $\mathbb{P}$ . Právě kolik je neekvivalentních  $\mathbb{P}$ -teorií  $T$  takových, že  $T, \varphi$  je bezesporná?

ŘEŠENÍ.  $(2^{|\mathbb{M}(\varphi)|} - 1) \cdot 2^{2^l - |\mathbb{M}(\varphi)|}$ . Je  $T, \varphi$  bezesporná  $\Leftrightarrow \mathbb{M}(T) \not\subseteq \mathbb{M}(\neg\varphi)$ . Jde tedy o počet množin  $K \subseteq \mathbb{P}^2$  s  $K \not\subseteq \mathbb{M}(\neg\varphi)$ . Těch je jasně uvedený počet.

b) Buď  $\{\varphi, \psi\}$  sporná  $\mathbb{P}$ -teorie. Právě kolik je neekvivalentních  $\mathbb{P}$ -teorií  $T$  s  $T \vdash \varphi \vee \psi$ ?

ŘEŠENÍ.  $2^{|\mathbb{M}(\varphi)| + |\mathbb{M}(\psi)|}$ . Je  $T \vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathbb{M}(T) \subseteq \mathbb{M}(\varphi) \cup \mathbb{M}(\psi)$ , jde tedy o počet množin  $K \subseteq \mathbb{P}^2$  s  $K \subseteq \mathbb{M}(\varphi) \cup \mathbb{M}(\psi)$ . Jelikož  $\mathbb{M}(\varphi) \cap \mathbb{M}(\psi) = \emptyset$  díky spornosti  $\{\varphi, \psi\}$ , je  $|\mathbb{M}(\varphi) \cup \mathbb{M}(\psi)| = |\mathbb{M}(\varphi)| + |\mathbb{M}(\psi)|$  a uvažovaný počet je tedy právě  $2^{|\mathbb{M}(\varphi)| + |\mathbb{M}(\psi)|}$ .

### E.3.6. Axiomatizovatelnost.

1.

a) Buď  $0 < k \in \mathbb{N}$  a  $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{P}^2$  pro  $i < k$  buďte axiomatizovatelné. Je  $\bigcup_{i < k} \mathbb{K}_i$  axiomatizovatelná?

ŘEŠENÍ. Ano. Nechť pro  $i < k$  je  $T_i$  axiomatika  $\mathbb{K}_i$ :  $\mathbb{M}(T_i) = \mathbb{K}_i$ . Pak

$$T = \{\varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_{k-1}; \varphi_i \in T_i \text{ s } i < k\}$$

axiomatizuje  $\bigcup_{i < k} \mathbb{K}_i$ . Pro  $v \in \mathbb{K}_i$  je totiž jasně  $v \models T$ , tedy  $\bigcup_{i < k} \mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{M}(T)$ . Nechť  $v \notin \bigcup_{i < k} \mathbb{K}_i$ . Pak pro  $i < k$  existuje  $\varphi_i \in T_i$  s  $v(\varphi_i) = 0$ . Pak  $v(\varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_{k-1}) = 0$ , tedy  $v \not\models T$ , tj.  $v \notin \mathbb{M}(T)$ .

b) Buď  $0 < k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K} = \{v_0, \dots, v_{k-1}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ . Napište  $\mathbb{P}$ -teorii  $T$  s  $\mathbb{M}(T) = \mathbb{K}$ .

ŘEŠENÍ.  $T = \{\bigvee_{i < k} p_i^{v_i(p_i)}; p_0, \dots, p_{k-1} \in \mathbb{P}\}$ . Platí  $w(p^{v(p)}) = 1 \Leftrightarrow w(p) = v(p)$  pro  $w, v$  z  $\mathbb{P}^2$ ,  $p \in \mathbb{P}$ . Tudíž  $v_j(\bigvee_{i < k} p_i^{v_i(p_i)}) = 1$  pro  $j < k$  a tedy  $v_j \models T$ . Nechť  $w \notin \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ .

Pak  $w(\bigvee_{i < k} p_i^{v_i(p_i)}) = 0$ , kde  $p_i$  splňují  $w(p_i) \neq v_i(p_i)$ . Tudíž  $w \not\models T$ .

Jiné řešení plyne užitím tvrzení, že sjednocení konečně mnoha axiomatizovatelných tříd je axiomatizovatelné, uijeme-li ještě toho, že  $\{v_0\}$  je axiomatizováno teorií  $\{p^{v_0(p)}; p \in \mathbb{P}\}$ .

c) Buď  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{P}^2$  konečná neprázdná. Je  $-\mathbb{K} (= \mathbb{P}^2 - \mathbb{K})$  axiomatizovatelná?

ŘEŠENÍ. Ano, pokud  $|\mathbb{P}| \in \mathbb{N}$ , Ne jinak. Když  $|\mathbb{P}| \in \mathbb{N}$ , axiomatizuje  $\mathbb{K}$  formule  $\bigvee_{v \in \mathbb{K}} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$  a  $-\mathbb{K}$  její negace. Dále z axiomatizovatelnosti  $-\mathbb{K}$  plyne, že  $\mathbb{K}$ , protože je axiomatizovatelná v každém případě, je axiomatizovatelná nějakým  $\varphi$ :  $\mathbb{K} = \mathbb{M}(\varphi)$ . Když  $\mathbb{P}$  je nekonečná, je neprázdná množina tvaru  $\mathbb{M}(\varphi)$  nekonečná (velikosti  $|\mathbb{P}^2|$ ), neboť pro ohodnocení  $v$  nezávisí  $v(\varphi)$  na hodnotách  $v(p)$  s  $p$  nepatřícím do  $\varphi$ . Tedy  $-\mathbb{K}$  není axiomatizovatelná.

2.

- a) Buď  $K \subseteq \mathbb{P}_2$  neprázdná konečná a  $w \in \mathbb{P}_2$ . Najděte klauzuli  $\chi$ , která axiomatizuje nějakou nadmnožinu  $K$ , neobsahující  $w$ .

ŘEŠENÍ. Nechť pro  $v \in K$  je prvovýrok  $p_v$  takový, že  $w(p_v) \neq v(p_v)$ . Pak klauzule  $\chi$  tvaru  $\bigvee_{v \in K} p_v^{v(p_v)}$  má požadované vlastnosti, neboť pro  $v, v'$  platí:  $v'(p^{v(p)}) = 1 \Leftrightarrow v'(p) = v(p)$ .

- b) Buď  $\mathbb{P}$  nekonečné. Nechť  $K \subseteq \mathbb{P}_2$  je axiomatizovatelná,  $-K \neq \emptyset$ . Dokažte, že  $|-K| = |\mathbb{P}_2|$ . ( $-K = \mathbb{P}_2 - K$ .)

ŘEŠENÍ. Nechť  $T$  axiomatizuje  $K$ , tj.  $K = \bigcap_{\varphi \in T} M(\varphi)$ . Buď  $w \in -K$ . Existuje  $\varphi \in T$  s  $w \notin M(\varphi)$ . Pak  $w \in M(\neg\varphi) \subseteq -K$  a díky nekonečnosti  $\mathbb{P}$  je  $|M(\neg\varphi)| = |\mathbb{P}_2|$ , tím spíše je  $|-K| = |\mathbb{P}_2|$ .

- c) Buď  $\mathbb{P}$  nekonečné. Nechť  $K = \{\text{ch}_u; u \subseteq \mathbb{P} \text{ je konečné}\}$ , kde  $\text{ch}_X$  je charakteristická funkce množiny  $X \subseteq \mathbb{P}$  na  $\mathbb{P}$ . Je  $K$  axiomatizovatelná?

ŘEŠENÍ. Ne. Ukážeme to sporem. Nechť  $T$  axiomatizuje  $K$  a její axiomy jsou klauzule. Pak  $\text{ch}_{\mathbb{P}}(\chi) = 1$  pro  $\chi \in T$ , což dává  $\text{ch}_{\mathbb{P}} \in K$  – spor. Dokážeme  $\text{ch}_{\mathbb{P}}(\chi) = 1$  pro  $\chi \in T$ . Stačí ukázat že nějaký disjunkt klauzule  $\chi$  je některý prvovýrok  $p$ . Sporem Buď  $\chi$  tvaru  $\neg p_0 \vee \dots \vee \neg p_n$  pro nějaké prvovýroky  $p_i$  s  $i \leq n$ . Pak  $\text{ch}_{\{p_0, \dots, p_n\}} \in K \subseteq M(\chi)$ , avšak  $\text{ch}_{\{p_0, \dots, p_n\}}(\chi) = 0$ , tj.  $\text{ch}_{\{p_0, \dots, p_n\}} \notin M(\chi)$  – spor.

### E.3.7. Rezoluce.

1.

- a) Buď  $T = \{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$ .

- i) Najděte množinovou reprezentaci  ${}^\circ T$  teorie  $T$ .
- ii) Najděte  $\text{Rcl}({}^\circ T)$ .

ŘEŠENÍ.

- i)  ${}^\circ T = \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ .
- ii)  $\text{Rcl}({}^\circ T) = {}^\circ T \cup \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\}$ .

- b) Buď  $T$  množina  $\mathbb{P}$ -klauzulí a  $\chi$  klauzule taková, že  $\emptyset \neq {}^\circ \chi \in \text{Rcl}({}^\circ T)$ . Buď  $v \in \mathbb{P}_2$  s  $v(\chi) = 1$ . Je  $v$  model  $T$ ?

ŘEŠENÍ. Ne. Buď  $T = \{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$  teorie nad  $\{p, q\}$ . Pro  $\chi$  tvaru  $p \vee \neg p$  je  ${}^\circ \chi \in \text{Rcl}({}^\circ T)$ ,  $v(\chi) = 1$ , kde  $v = \{\langle p, 1 \rangle, \langle q, 1 \rangle\}$ , ale  $v \not\models T$ .

**Témata.**

- Elementární teorie dokazování.
- Vlastnosti kvantifikátorů.
- Prenexní tvary.
- O kompletních teoriích.
- Rozšíření o funkční symbol a definice.
- Otevřené teorie.
- Elementární extenze a Löwenheim-Skolemovy věty.
- Eliminace. Prvomodely.

**E.4.1. Elementární teorie dokazování.**

1.

- a)  $\vdash (\exists x)(x = x)$  dokažte pomocí základních deduktivních obrátů.  
 ŘEŠENÍ.  $((\forall x)(x \neq x) \rightarrow x \neq x) \rightarrow (\neg\neg(x = x) \rightarrow (\exists x)(x = x))$  je tautologie. Tudíž modus ponens a axiom substituce dají  $\vdash \neg\neg(x = x) \rightarrow (\exists x)(x = x)$ . Protože  $x = x \rightarrow \neg\neg(x = x)$  je tautologie, je  $\vdash \neg\neg(x = x)$  a modus ponens dá požadované  $\vdash (\exists x)(x = x)$ .
- b) Dokažte  $\vdash F(c) = F(c)$ , je-li  $F$  unární a  $c$  nulární funkční symbol.  
 ŘEŠENÍ.  $x = x$  je axiom, tedy  $\vdash x = x$  a tedy  $\vdash F(c) = F(c)$  plyne z tvrzení o instanci.

2.

- a)  $\vdash (\exists x)\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\varphi$  dokažte pomocí základních deduktivních obrátů a věty o dedukci.  
 ŘEŠENÍ. Máme dokázat  $\vdash \neg(\forall x)\neg\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\varphi$ . Je  $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$  díky tautologii  $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ . Odtud  $(\forall x)\neg\neg\varphi \vdash (\forall x)\varphi$  pomocí axiomu substituce a pravidla generalizace a pomocí věty o dedukci  $\vdash (\forall x)\neg\neg\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$ . Analogicky plyne  $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\neg\neg\varphi$ . Odtud pomocí obrátu o ekvivalenci plyne  $\vdash (\forall x)\neg\neg\varphi \leftrightarrow (\forall x)\varphi$  a pomocí tautologie  $(\psi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow (\neg\psi \leftrightarrow \neg\chi)$  a modus ponens plyne dokazované.
- b) Dokažte  $T, \varphi(x) \vdash \psi \Rightarrow T \vdash (\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi(y/c)$ , kde  $c$  je konstantní symbol jazyka  $L(T)$ .  
 ŘEŠENÍ. Protože  $T, (\forall x)\varphi \vdash \varphi$ , máme  $T, (\forall x)\varphi \vdash \psi$ . Odtud  $T \vdash (\forall x)\varphi \rightarrow \psi$  pomocí věty o dedukci a z toho plyne dokazované pomocí tvrzení o instanci.

### E.4.2. Vlastnosti kvantifikátorů.

1.

a) Dokažte  $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((Qx)\varphi \rightarrow (Qx)\psi)$ , kde  $Q$  značí kvantifikátor.

ŘEŠENÍ. Buďte  $T$  logické axiomy v jazyce rozšířeném o nové konstantní symboly  $c_i$ ;  $\varphi(x, x_1/c_1, \dots)$  resp.  $\psi(x, x_1/c_1, \dots)$  označme  $\varphi'(x)$  resp.  $\psi'(x)$  (konstanty substituujeme za všechny volné proměnné, kromě  $x$ ). Pak  $T, (\forall x)(\varphi' \rightarrow \psi') \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$ , dle pravidla distribuce kvantifikátoru i  $T, (\forall x)(\varphi' \rightarrow \psi') \vdash (Qx)\varphi' \rightarrow (Qx)\psi'$  a zbytek dá věta o dedukci a konstantách.

b) Dokažte  $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$ .

ŘEŠENÍ. Je  $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow \varphi, \vdash \varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi$ ; odtud pomocí pravidla tranzitivity implikace plyne dokazované.

c) Dokažte  $\vdash \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \vdash (\exists x)\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \vdash (\forall x)\neg\varphi \vee (\forall x)\varphi$ .

ŘEŠENÍ. Prvá ekvivalence:  $\vdash \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \vdash (\exists x)\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$ . Užitím definice disjunkce a existenčního kvantifikátoru plyne druhá ekvivalence.

2.

a)  $\vdash (\forall x)(\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\forall x)\varphi$ .

ŘEŠENÍ. i)  $\vdash (\forall x)(\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$  dává axiom substituce.

ii)  $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)(\forall x)\varphi$  plyne z  $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$  pravidlem  $\forall$ -zavedení. Z i), ii) plyne ihned dokazované.

b)  $\vdash (\exists x)(\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\forall x)\varphi$ .

ŘEŠENÍ. i)  $(\exists x)(\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$  dává pravidlo  $\exists$ -zavedení.

ii)  $(\forall x)\varphi \rightarrow (\exists x)(\forall x)\varphi$  plyne z platného vztahu  $\vdash \psi \rightarrow (\exists x)\psi$ . Z i), ii) plyne ihned dokazované.

3. Vytýkání kvantifikátorů - protipříklady.

a)  $\not\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ .

ŘEŠENÍ. Buď  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$ , kde  $P, R$  jsou unární predikátové symboly,  $a \in P^A \subseteq R^A \subsetneq A$ . Pak

$$\mathcal{A} \models (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)), \quad \mathcal{A} \not\models (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x))[a].$$

Tedy  $\mathcal{A} \not\models (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x))$ .

b)  $\not\vdash (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$ .

ŘEŠENÍ. Buď  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$ , kde  $P, R$  jsou unární predikátové symboly,  $a \in A - P^A, \emptyset \neq P^A \subsetneq R^A$ . Pak

$$\mathcal{A} \models (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x))[a], \quad \mathcal{A} \not\models (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)).$$

Tedy  $\mathcal{A} \not\models (P(x) \rightarrow (\forall x)R(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ .

c)  $\not\vdash (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi)$ .

ŘEŠENÍ. Buď  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, R^A \rangle$ , kde  $P, R$  jsou unární predikátové symboly,  $a \in P^A \subsetneq A, R^A = \emptyset$ . Pak

$$\mathcal{A} \models (\exists x)(P(x) \rightarrow R(x)) \quad (\text{protože existuje } b \in A - P^A),$$

$$\mathcal{A} \not\models (P(x) \rightarrow (\exists x)R(x))[a] \quad (\text{protože je } a \in P^A).$$

Tedy  $\mathcal{A} \not\models (\exists x)(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow (\exists x)R(x))$ .

### E.4.3. Prenexní tvary.

1.

a) Buď  $\varphi$  resp.  $\varphi'$  formule

$$((\forall x)R(x, y, z) \vee (\exists x)U(x)) \rightarrow (\exists z)P(z, y) \text{ resp. } (\exists z')(\exists x)(\forall x')((R(x, y, z) \vee U(x')) \rightarrow P(z', y)),$$

kde  $P, R, U$  jsou relační symboly četnosti po řadě 2, 3, 1 a  $x, y, z, x', z', y$  jsou různé proměnné.

i) Je  $\varphi'$  v prenexním tvaru?

ii) Je  $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ ?

ŘEŠENÍ.

i) Ano. Za prefixem  $(\exists z')(\exists x)(\forall x')$  s různými  $z', x, x'$  je bezkvantifikátorová formule.

ii) Ano. Neboť  $\varphi'$  se získá z  $\varphi$  prenexními operacemi následovně:

a) Místo podformule  $(\exists z)P(z, y)$  se vezme varianta  $(\exists z')P(z', y)$  a vytkne se korektně  $(\exists z')$ .

b) Vytkne se korektně  $(\forall x)$  před  $(R(x, y, z) \vee (\exists x)U(x))$ .

c) Místo podformule  $(\exists x)U(x)$  se vezme varianta  $(\exists x')U(x')$  a vytkne se korektně  $(\exists x')$  před  $(R(x, y, z) \vee U(x'))$ .

b) Buď  $\varphi$  resp.  $\varphi'$  formule

$$(\forall x)\varphi_0 \rightarrow (\exists x)\varphi_1 \text{ resp. } (\exists x)(\exists y)(\varphi_0(x/y) \rightarrow \varphi_1),$$

kde  $\varphi_0, \varphi_1$  jsou otevřené formule a  $x, y$  jsou různé proměnné.

i) Je  $\varphi'$  v prenexním tvaru?

ii) Za jakých předpokladů je  $\varphi'$  získáno z  $\varphi$  prenexními operacemi?

ŘEŠENÍ.

i) Ano. Prefix  $(\exists x)(\exists y)$  s různými  $x, y$  je před otevřenou formulí.

ii) Pokud  $y$  není volná ve  $\varphi$  (a je substituovatelná za  $x$  do  $\varphi_0$ , což je implicitě dáno zápisem  $\varphi_0(x/y)$ ). Provedou se pak následující prenexní operace: a) vytkne se korektně  $(\exists x)$ . b) Podformule  $(\forall x)\varphi_0$  se nahradí variantou  $(\forall y)\varphi_0(x/y)$ , vytvořenou korektně díky předpokladům. c) Vytkne se díky předpokladům korektně  $(\forall y)$  před  $(\varphi_0(x/y) \rightarrow \varphi_1)$ .

### E.4.4. O kompletních teoriích.

1.

a) Má kompletní teorie bezespornou extenzi, která není kompletní?

ŘEŠENÍ. Ano. Stačí vzít extenzi  $T'$  teorie  $T$  o nový unární relační symbol  $P$ ; pak  $(\exists x)P(x)$  je nezávislá sentence teorie  $T'$ .

b) Buď  $L$  jazyk s rovností a  $n$ -árním relačním symbolem  $P$ . Existuje  $L$ -teorie  $T$ , která má modely, každý její model je jednoprvkový a  $T$  není kompletní?

ŘEŠENÍ. Ano. Teorie  $T$  s jediným axiomem  $x = y$  není kompletní, neboť má nezávislou sentenci  $(\forall x_0, \dots, x_{n-1})P(x_0, \dots, x_{n-1})$ .

2.

a) Najděte kompletní teorii, která má až na elementární ekvivalenci právě spočetně různých modelů.

ŘEŠENÍ. Neexistuje, neboť kompletní teorie má až na elementární ekvivalenci právě jeden model. Dva elementárně neekvivalentní modely teorie  $T$  mají za následek existenci nezávislé sentence teorie  $T$ .

b) Buďte  $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$  dvě  $L$ -struktury a  $T$  buď  $L$ -teorie s axiomatikou

$$\{\varphi \vee \psi; \varphi, \psi \text{ jsou } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \models \psi\}.$$

i) Je  $T$  bezesporná?

ii) Je  $T$  kompletní.

ŘEŠENÍ.

i) Ano.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou modely  $T$ .

ii) Ne. Existuje  $L$ -sentence  $\varphi$  tak, že  $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \models \neg\varphi$ . Pak  $T \not\vdash \varphi, T \not\vdash \neg\varphi$ .

#### E.4.5. Rozšíření o funkční symbol a definice.

1.

Nechť  $T$  je  $L$ -teorie a  $T \vdash (\exists!y)\chi(\bar{x}, y)$ . Nechť  $F$  je  $l(\bar{x})$ -ární funkční symbol nepatřící do  $L$ . Nechť  $T'$  resp.  $T''$  je  $L \cup \{F\}$ -teorie, která je extenzí  $T$  o axiom

$$F(\bar{x}) = y \leftrightarrow \chi(\bar{x}, y) \quad \text{resp.} \quad \chi'(y/F(\bar{x})),$$

přičemž  $\chi'$  je varianta  $\chi$  (zaručující korektnost uvedené substitute).

a) Dokažte:  $T' \vdash \chi'(\bar{x}, y/F(\bar{x}))$ .

ŘEŠENÍ. V  $T'$  máme postupně:  $y = F(\bar{x}) \leftrightarrow \chi'(\bar{x}, y)$ ,  $F(\bar{x}) = F(\bar{x}) \leftrightarrow \chi'(\bar{x}, F(\bar{x}))$ ,  $\chi'(\bar{x}, F(\bar{x}))$ .

b) Dokažte:  $T'' \vdash F(\bar{x}) = y \leftrightarrow \chi(\bar{x}, y)$ .

ŘEŠENÍ. a) Dokážeme  $\rightarrow \vee T''$ . V  $T''$  máme postupně:  $y = F(\bar{x}) \rightarrow (\chi'(\bar{x}, y) \leftrightarrow \chi'(\bar{x}, F(\bar{x})))$ ,  $\chi'(\bar{x}, F(\bar{x})) \rightarrow (y = F(\bar{x}) \rightarrow \chi'(\bar{x}, y))$ ,  $y = F(\bar{x}) \rightarrow \chi'(\bar{x}, y)$ ,  $y = F(\bar{x}) \rightarrow \chi(\bar{x}, y)$  (díky  $\vdash \chi \leftrightarrow \chi'$ ). b) Dokážeme  $\leftarrow \vee T''$ . V  $T''$  máme postupně:  $(\chi'(\bar{x}, F(\bar{x})) \& \chi'(\bar{x}, y)) \rightarrow y = F(\bar{x})$  (díky unicitě  $\exists!$ ),  $\chi'(\bar{x}, F(\bar{x})) \rightarrow (\chi'(\bar{x}, y) \rightarrow y = F(\bar{x}))$ ,  $\chi'(\bar{x}, y) \rightarrow y = F(\bar{x})$ ,  $\chi(\bar{x}, y) \rightarrow y = F(\bar{x})$  (díky  $\vdash \chi \leftrightarrow \chi'$ ).

2.

Teorie těles má axiomatiku  $T = T_0 \cup \{(\exists y)\varphi\}$ , kde  $T_0$  je jistá množina otevřených formulí jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  těles a  $\varphi$  je  $x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1$ .

• Buď  $F$  nový unární funkční symbol a  $T^\varphi$  buď  $L \cup \{F\}$ -teorie,

$$T^\varphi = T_0 \cup \{\varphi(y/F(x))\}.$$

• Buď  $\psi$  formule  $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \& y = 1)$ ; je  $T_0 \vdash (\forall x)(\exists!y)\psi$ . Nechť  $T^\psi$  je  $L \cup \{F\}$ -teorie,

$$T^\psi = T_0 \cup \{\psi(y/F(x))\}.$$

a) Dokažte:  $T^\varphi$  je konzervativní otevřená extenze teorie  $T$  (a  $(\forall x)\varphi(y/F(x))$  je Skolemova varianta  $(\forall x)(\exists y)\varphi$ ).

ŘEŠENÍ.  $S = T \cup \{\varphi(y/F(x))\}$  je rozšíření  $T$  o funkční symbol  $F$ , tedy to je konzervativní extenze. Protože  $\vdash \varphi(y/F(x)) \rightarrow (\exists y)\varphi$ , je  $T^\varphi = S - \{(\exists y)\varphi\}$  ekvivalentní s  $S$  a tedy to je konzervativní extenze  $T$ , která je ovšem tvořena jen otevřenými axiomy. (Evidentně je  $(\forall x)\varphi(y/F(x))$  Skolemova varianta  $(\forall x)(\exists y)\varphi$ .)

b) Dokažte: Neexistuje  $L$ -formule  $\chi(x, y)$  taková, že  $T^\varphi \vdash F(x) = y \leftrightarrow \chi(x, y)$ .

ŘEŠENÍ. Sporem. Nechť  $\chi$  existuje. Pak speciálně, díky tomu, že  $T^\varphi$  je konzervativní extenze  $T$ , máme  $T \vdash (\exists!y)\chi(0, y)$ . Pro těleso racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  buď  $a \in \mathbb{Q}$  takové, že  $\mathbb{Q} \models \chi[0, a]$ ; takové  $a$  je jediné. Interpretujme  $F$  tak, že  $F^{\mathbb{Q}}(0) \neq a$  a  $F^{\mathbb{Q}}(q) = q^{-1}$  pro  $q \neq 0$ ; to ovšem můžeme, neboť  $\vdash \varphi(0, y) \leftrightarrow y = y$ . Pak  $\langle \mathbb{Q}, F^{\mathbb{Q}} \rangle \models T^\varphi \cup \{\neg\chi(0, F(0))\}$ . To je spor s předpokládaným  $T^\varphi \vdash \chi(0, F(0))$ .

c) Dokažte:  $T^\psi$  je konzervativní otevřená extenze teorie  $T$ .  $T^\psi$  je extenze  $T^\varphi$ , není však ekvivalentní s  $T^\varphi$ .

ŘEŠENÍ.  $S = T \cup \{\psi(y/F(x))\}$  je extenze  $T$  o funkční symbol  $F$ , tedy to je konzervativní extenze  $T$ . Platí

$$T_0 \vdash \psi(x, y) \rightarrow \varphi(x, y). \quad (*)$$

Odtud plyne  $T_0, \psi(y/F(x)) \vdash (\exists y)\varphi$ , tudíž  $T^\psi = S - \{(\exists y)\varphi\}$  je ekvivalentní s  $S$  a tedy to je konzervativní extenze  $T$ , která je tvořena jen otevřenými axiomy. Dále  $T^\psi \vdash \varphi(y/F(x))$  dle (\*). Tudíž je  $T^\psi$  extenze  $T^\varphi$ . Konečně  $T^\psi \vdash F(0) = 1$ , ale  $T^\varphi \not\vdash F(0) = 1$ ; o tom svědčí např.  $\langle \mathbb{Q}, F^{\mathbb{Q}} \rangle \models T^\varphi$  s  $F^{\mathbb{Q}}(0) = 0$ .

#### E.4.6. Otevřené teorie.

Teorie je *otevřená*, je-li množina jejích mimologických axiomů tvořena otevřenými formullemi. Teorie  $T$  je *axiomatizovatelná otevřenými formullemi* čili *otevřeně axiomatizovatelná*, existuje-li otevřená teorie ekvivalentní s  $T$ . Platí: podstruktura modelu otevřené teorie  $T$  je model  $T$ .

1.

Buď  $T$  teorie čisté rovnosti, tj. teorie v jazyce  $L_0$  s rovností bez mimologických symbolů, která nemá mimologické axiomy. Pro nenulové  $n \in \mathbb{N}$  buď teorie

$$T_n / T_{\leq n} / T_{\geq n} \text{ s jediným axiomem „existuje právě /nejvýše /alespoň } n \text{ prvků“}.$$

- a) Je  $T_n$  axiomatizovatelná otevřenými formulemi?  
 ŘEŠENÍ. Pro  $n = 1$  je, a to jediným axiomem  $x = y$ . Pro  $n > 1$  není. Je-li totiž  $\langle A \rangle \models T_n$ , pro  $\emptyset \neq A' \subsetneq A$  je  $\langle A' \rangle$  podstruktura  $\langle A \rangle$  a není to model  $T_n$ .
- b) Je  $T_{\leq n}$  axiomatizovatelná otevřenými formulemi?  
 ŘEŠENÍ. Každá  $T_{\leq n}$  je, neboť je ekvivalentní s teorií  $\bigvee \{x_i = x_j; i \neq j, i, j \leq n\}$ .
- c) Je  $T_{\geq n}$  axiomatizovatelná otevřenými formulemi?  
 ŘEŠENÍ. Pro  $n = 1$  je, neboť  $T_{\geq 1}$  je ekvivalentní s  $T$ . Pro  $n > 1$  není. Je-li totiž  $\langle A \rangle \models T_{\geq n}$ , jednoprvková podstruktura modelu  $\langle A \rangle$  není model  $T_{\geq n}$ .
- d) Které jednoduché kompletní extenze teorie  $T$  jsou otevřeně axiomatizovatelné?  
 ŘEŠENÍ. Kompletní jednoduché extenze teorie  $T$  jsou až na ekvivalenci teorií právě  $T_n$  s  $0 < n \in \mathbb{N}$  a  $T_\infty = \bigcup_{0 < n \in \mathbb{N}} T_{\geq n}$ . Axiomatizovatelná otevřenými formulemi je jen  $T_1$ . Každá jiná má model, jehož jednoprvková podstruktura není jejím modelem.

## 2. Jednoduché otevřené extenze lineárního uspořádání.

Buď  $T$  otevřená axiomatika teorie lineárního uspořádání. Nechť pro  $0 < n \in \mathbb{N}$  je  $T_{\leq n}$  jednoduchá extenze  $T$  o axiom „existuje nejvýše  $n$  prvků“

- a) Je každé  $T_{\leq n}$  otevřeně axiomatizovatelná jednoduchá extenze  $T$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Každá  $T_{\leq n}$  je ekvivalentní extenzi  $T$  o axiom  $\bigvee \{x_i = x_j; i \neq j, i, j \leq n\}$ .
- b) Buď  $T'$  jednoduchá otevřená extenze  $T$ , která má jen konečné modely. Je  $T'$  ekvivalentní s některou teorií  $T_{\leq n}$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Z věty o kompaktnosti plyne, že existuje největší  $n \in \mathbb{N}$  takové, že existuje model  $\mathcal{A} \models T'$  s univerzem  $A$  velikosti  $n$ . Platí pak  $\mathcal{B} \models T' \Rightarrow \mathcal{B} \models T_{\leq n}$ ; tudíž  $T'$  je extenze  $T_{\leq n}$ . Dále  $\mathcal{B} \models T_{\leq n} \Rightarrow \mathcal{B} \models T'$ , neboť díky  $\mathcal{B} \models T_{\leq n}$  platí, že až na izomorfismus, převádějící  $i$ -tý prvek uspořádání  $\leq^B$  na  $i$ -tý prvek uspořádání  $\leq^A$  pro  $i < |B|$ , je  $\mathcal{B}$  podstruktura  $\mathcal{A}$ , a tedy  $\mathcal{B} \models T'$ . Tudíž  $T_{\leq n}$  je extenze  $T'$ .
- c) Buď  $T'$  jednoduchá otevřená extenze  $T$ , která má nekonečný model. Je  $T'$  ekvivalentní s  $T$ ?  
 ŘEŠENÍ. Ano. Stačí jen dokázat, že  $T$  je extenze  $T'$ . Buď  $\mathcal{A}' \models T'$  nekonečný model. Nechť  $\varphi$  je axiom  $T'$ ; dokazujeme, že  $T \models \varphi(\bar{x})$ . Sporem: necht existuje  $\mathcal{A} \models T$ ,  $(\exists \bar{x}) \neg \varphi$ . Buď  $\bar{a} \in A$  s  $\mathcal{A} \models \neg \varphi[\bar{a}]$  a označme  $\mathcal{B}$  podstrukturu  $\mathcal{A}$  generovanou  $\bar{a}$ , tj.  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \upharpoonright \bar{a}$ . Je to konečné lineární uspořádání, je tedy izomorfní s  $\mathcal{B}' = \mathcal{A}' \upharpoonright B'$ , kde  $B' \subseteq A'$  je  $|B|$ -prvková. Je  $\mathcal{B}' \models T'$  díky tomu, že  $T'$  je otevřená a ovšem  $\mathcal{B}' \models (\exists \bar{x}) \neg \varphi$ , což díky  $\mathcal{B}' \models T'$  neplatí.

## E.4.7. Elementární extenze a Löwenheim-Skolemovy věty.

### 1.

- a) Buď  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  a  $\varphi(\bar{x}, y)$  formule s  $n = l(\bar{x})$ . Nechť  $n$ -ární funkce  $F^A$  resp.  $F^B$  je definována v  $\mathcal{A}$  resp.  $\mathcal{B}$  formulí  $\varphi$ . Dokažte:
- $\langle \mathcal{A}, F^A \rangle \prec \langle \mathcal{B}, F^B \rangle$ .
  - $\langle \mathcal{A}, F^A \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, F^B \rangle$ .
- ŘEŠENÍ.
- Buď  $T$  teorie  $\text{Th}(\mathcal{A})$ ,  $T'$  extenze  $T$  o funkční symbol  $F$  definovaný formulí  $\varphi(\bar{x}, y)$ ; podmínky existence a jednoznačnosti jsou jasně splněny. Pro formuli  $\psi(\bar{x})$  jazyka  $L(T) \cup \{F\}$  buď  $\psi^*(\bar{x})$  její překlad do  $L(T)$ ; platí  $T' \vdash \psi \leftrightarrow \psi^*$ . Jelikož  $\langle \mathcal{A}, F^A \rangle, \langle \mathcal{B}, F^B \rangle$  jsou modely  $T'$ , pro  $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$  máme:  

$$\langle \mathcal{A}, F^A \rangle \models \psi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi^*[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi^*[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \mathcal{B}, F^B \rangle \models \varphi[\bar{a}].$$
  - Je to důsledek vztahu  $\langle \mathcal{A}, F^A \rangle \prec \langle \mathcal{B}, F^B \rangle$ .
- b) Buď  $\mathcal{A}$  vektorový prostor reálných čísel nad tělesem reálných čísel. Dokažte:
- Pro každou velikost  $\kappa \geq |\mathbb{R}|$  (tj.  $\kappa \geq$  kontinuum) existuje  $\mathcal{B}$  s  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  a  $|B| = \kappa$ .
  - Neexistuje spočetná struktura  $\mathcal{B}$  s  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

ŘEŠENÍ.

- Plyne to ihned z Löwenheim-Skolemovy věty nahoru, neboť  $\|L(\mathcal{A})\| = |\mathbb{R}|$ .
- Když  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  a  $B$  obsahuje  $a \neq 0$ , obsahuje všechny prvky  $ra$  s  $r \in \mathbb{R}$  a těch je jako reálných čísel; tedy  $B$  obsahuje nespočetnou množinu a tudíž není spočetná.

2.

a) Buď  $\mathcal{A}$  těleso komplexních čísel v jazyce  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  a  $X \subseteq \mathcal{A}$  nejvýše spočetné. Existuje spočetné podtěleso  $\mathcal{B}$  tělesa  $\mathcal{A}$  tak, že  $X \subseteq \mathcal{B}$  a každý nekonstantní polynom s koeficienty z  $B$  má kořen v  $B$  (a tedy  $\mathcal{B} \models \text{ACF}_0$ )?

ŘEŠENÍ. Ano. Podle Löwenheim-Skolemovy věty dolů existuje spočetná struktura  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$  s  $X \subseteq B$ . Uvažovaný polynom  $f(x)$  tvaru  $\sum_{0 \leq i \leq n} b_i x^i$  s  $b_i \in B$  má řešení v  $\mathcal{A}$  a je interpretací termu tvaru  $t(x)$  tvaru  $\sum_{0 \leq i \leq n} c_{b_i} x^i$  jazyka  $L_B$ ;  $c_{b_i}$  je jméno prvku  $b_i$ . Tedy díky  $\mathcal{B}_B \prec \mathcal{A}_B \models (\exists x)(t(x) = 0)$  máme  $\mathcal{B}_B \models (t(x) = 0)[b]$  pro nějaké  $b \in B$  a pak  $f(b) = 0$ ;  $b$  je hledaný kořen.

b) Nechť  $\mathcal{A}$  je těleso,  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ .

i) Buď  $f(x) = \sum_{i \leq n} b_i x^i$  polynom stupně  $n \geq 1$  s koeficienty  $b_i \in B$  a  $b_n \neq 0$ . Pak každý kořen polynomu  $f$  v tělese  $\mathcal{A}$  je v  $B$ .

ii) Buď  $\mathcal{A} \models \text{ACF}$  a nechť  $C = \bigcap \{B; \mathcal{B} \prec \mathcal{A}\}$ . Pak  $\mathcal{A} \upharpoonright C \models \text{ACF}$ .

ŘEŠENÍ.

i) Polynom  $f$  má v  $\mathcal{A}$  jen konečně kořenů, řekněme  $k$ . Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi(y_0, \dots, y_n)[b_0, \dots, b_n],$$

kde  $\varphi$  je „existuje právě  $k$  prvků  $x$  s  $t(x, y_0, \dots, y_n) = 0$ “ a  $t$  je term  $\sum_{i \leq n} y_i x^i$ . Tedy  $\mathcal{B} \models \varphi[b_0, \dots, b_n]$ , tj. v  $\mathcal{B}$  má  $f$  právě  $k$  kořenů; každý je ovšem kořenem v  $\mathcal{A}$  a tedy to jsou právě kořeny  $f$  v  $\mathcal{A}$ .

ii) Množina  $C$  je jasně uzavřená na  $0, 1, +, -, \cdot$ , podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright C$  je evidentně těleso. Nenulový polynom s koeficienty z  $C$  má kořen v  $\mathcal{A}$  a podle i) je tento kořen v  $C$ . Tedy je  $\mathcal{A} \upharpoonright C$  algebraicky uzavřené těleso.

3. Modelová kompletnost extenze  $T$  teorie čisté rovnosti o „existuje nekonečně prvků“.

a) Buďte  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  nekonečné modely teorie čisté rovnosti,  $|A| < |B|$ . Dokažte, že  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

ŘEŠENÍ. Existuje  $\mathcal{A}' \prec \mathcal{B}$  s  $|A'| = |A|$  dle Löwenheim-Skolemovy věty dolů. Buď  $h$  prosté zobrazení  $B$  na  $B$ , které prostě zobrazuje  $A$  na  $A'$ ; existuje, neboť  $|B - A'| = |B - A|$  díky  $|A'| = |A| < |B|$ . Je ovšem  $h$  automorfismus  $\mathcal{B}$  a izomorfismus  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ . Pak pro  $\varphi(\bar{x})$  a  $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$  máme  $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$ .

b) Buď  $T$  extenze teorie čisté rovnosti o schema „existuje nekonečně prvků“. Dokažte, že  $T$  je modelově kompletní.

ŘEŠENÍ. Buďte  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  nekonečné modely  $T$ ; máme dokázat, že  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . Když  $|A| < |B|$ , platí to dle a). Buď  $|A| = |B|$ . Podle Löwenheim-Skolemovy věty nahoru existuje  $\mathcal{B}'$  tak, že  $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$  a  $|B| < |B'|$ . Podle a) máme  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$ , tedy i  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

#### E.4.8. Eliminace. Prvomodely.

1.

a) Buď  $T'$  extenze  $T$  o definovaný symbol. Dokažte:

i) Má-li  $T$  eliminaci kvantifikátorů, má i  $T'$ .

ii) Je-li  $T$  modelově kompletní, je i  $T'$ .

ŘEŠENÍ.

i) Pro  $L(T')$ -formuli  $\varphi'(\bar{x})$  s  $l(\bar{x}) > 0$  buď  $\varphi(\bar{x})$  „překlad  $\varphi'$  do  $T$ “, tj.  $\varphi$  je  $L(T)$ -formule s  $T' \vdash \varphi' \Leftrightarrow \varphi$ . Existuje  $\varphi_0(\bar{x})$  otevřená s  $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi_0$ ; pak  $T' \vdash \varphi'(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi_0(\bar{x})$ .

ii) Nechť  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'$  jsou modely  $T'$ ,  $\mathcal{A}$  resp.  $\mathcal{B}$  reduct  $\mathcal{A}'$  resp.  $\mathcal{B}'$  na jazyk  $L(T)$ . Buď  $\varphi'(\bar{x})$  nějaká  $L(T')$ -formule,  $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$ ; máme dokázat  $\mathcal{A}' \models \varphi'[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models \varphi'[\bar{a}]$ .

Buď  $\varphi(\bar{x})$  „překlad  $\varphi'$  do  $T$ “, tj.  $\varphi$  je  $L(T)$ -formule s  $T' \vdash \varphi' \Leftrightarrow \varphi$ . Pak máme

$$\mathcal{A}' \models \varphi'[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models \varphi'[\bar{a}].$$

b) Buď  $T$  extenze teorie PE čisté rovnosti o schema „existuje nekonečně prvků“. Buď  $T'$  extenze  $T$  získaná jen rozšířením jazyka o unární funkční symbol  $S$ . Pak je  $T$  modelově kompletní (a má i eliminaci kvantifikátorů),  $T'$  však není modelově kompletní. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Svědčí o tom následující, kde  $S(n) = n + 1$  pro  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\langle \mathbb{N} - \{0\}, S \rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, S \rangle, \quad \langle \mathbb{N} - \{0\}, S \rangle \not\prec \langle \mathbb{N}, S \rangle.$$

- c) Teorie SC není modelově kompletní. Najděte její extenzi  $T'$  o definovaný konstantní symbol tak, aby  $T'$  měla eliminaci kvantifikátorů (a tedy byla i modelově kompletní).

ŘEŠENÍ. Buď  $T'$  extenze SC o definovaný konstantní symbol 0 axiomem

$$y = 0 \leftrightarrow \neg(\exists x)(S(x) = y).$$

Pak je  $T'$  ekvivalentní  $SC_0$ , která má eliminaci kvantifikátorů.

## 2.

- a) Buď  $T'$  extenze teorie  $T$  jen o nové konstantní symboly bez přidání mimologických axiomů. Dokažte:

- i) Má-li  $T$  eliminaci kvantifikátorů, má i  $T'$ .
- ii) Je-li  $T$  modelově kompletní, je i  $T'$ .

ŘEŠENÍ.

- i) Buď  $\varphi(\bar{x})$  nějaká  $L(T')$ -formule s  $l(\bar{x}) > 0$ ;  $\varphi$  je tvaru  $\psi(\bar{x}, y_0/c_0, \dots, y_{n-1}/c_{n-1})$  s proměnnými  $y_0, \dots, y_{n-1}$  nepatřícími ani  $\varphi$  ani  $\bar{x}$ , přičemž  $c_0, \dots, c_{n-1}$  jsou všechny nové konstantní symboly formule  $\varphi$  a  $\psi$  je  $L(T)$ -formule získaná z  $\varphi$  nahrazením  $c_i$  proměnnou  $y_i$  pro  $i < n$ . Existuje otevřená  $L(T)$ -formule  $\psi_0(\bar{x}, \bar{y})$  s  $T \vdash \psi \leftrightarrow \psi_0$ . Pak i  $T' \vdash \psi(\bar{x}, \bar{c}) \leftrightarrow \psi_0(\bar{x}, \bar{c})$  a vpravo je otevřená  $L(T')$ -formule.
- ii) Nechť  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'$  jsou modely  $T'$ ,  $\mathcal{A}$  resp.  $\mathcal{B}$  redukt  $\mathcal{A}'$  resp.  $\mathcal{B}'$  na jazyk  $L(T)$ . Buď  $\varphi(\bar{x})$  nějaká  $L(T')$ -formule,  $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$ ; máme dokázat  $\mathcal{A}' \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models \varphi[\bar{a}]$ . Formule  $\varphi$  je tvaru  $\psi(\bar{x}, y_0/c_0, \dots, y_{n-1}/c_{n-1})$  s proměnnými  $y_0, \dots, y_{n-1}$  nepatřícími ani  $\varphi$  ani  $\bar{x}$ , přičemž  $c_0, \dots, c_{n-1}$  jsou všechny nové konstantní symboly patřící  $\varphi$  a  $\psi$  je  $L(T)$ -formule získaná z  $\varphi$  nahrazením  $c_i$  proměnnou  $y_i$  pro  $i < n$ . Buď  $\bar{b} = \langle c_0^A, \dots, c_{n-1}^A \rangle$ . Pak platí:

$$\mathcal{A}' \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}] \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models \varphi[\bar{a}].$$

- b) Buď  $T$  teorie v jazyce  $L$  s rovností, který má jen konstantní symboly a axiomatikou  $T$  je schema „existuje nekonečně prvků“. Má  $T$  eliminaci kvantifikátorů?

ŘEŠENÍ. Ano. Buď  $S$  teorie čisté rovnosti rozšířená o schema „existuje nekonečně prvků“. Pak  $S$  je jasně f-homogenní, tedy má eliminaci kvantifikátorů. Jelikož  $T$  je extenze  $S$  jen o nové konstantní symboly a žádné mimologické axiomy, má též eliminaci kvantifikátorů.

## 3.

- a) Buď  $L = \langle c_k; k \in \mathbb{N} \rangle$  jazyk s rovností, kde  $c_k$  jsou konstantní symboly, a  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 2k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$  buďte dvě  $L$ -struktury. Lze parciální vnoření  $f = \{(0, 0)\}$  z  $\mathcal{A}$  do  $\mathcal{B}$  bezprostředně rozšířit do 1?

ŘEŠENÍ. Ne. Je-li  $f' = f \cup \langle 1, b \rangle$ , je  $b = c_k^B$  pro nějaké  $k$ , tudíž platí  $\mathcal{B} \models (x = c_k)[b]$ . Avšak  $\mathcal{A} \not\models (x = c_k)[1]$  a  $f'$  tedy není parciální vnoření z  $\mathcal{A}$  do  $\mathcal{B}$ .

- b) Buď  $L = \langle c_k; k \in \mathbb{N} \rangle$  jazyk s rovností, kde  $c_k$  jsou konstantní symboly, a  $T$  buď  $L$ -teorie s axiomou  $\{c_k \neq c_l; k < l \in \mathbb{N}\}$ .

- i) Je  $T$  teorie f-homogenní?
- ii) Je  $T$  teorie 1-koexistenční?

ŘEŠENÍ.

- i) Ne.  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 2k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$  jsou modely  $T$ , avšak parciální vnoření  $f = \{(0, 0)\}$  nelze bezprostředně rozšířit do 1.
- ii) Ano. Buď  $f$  neprázdné konečné parciální vnoření modelu  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  do modelu  $\mathcal{B}$  teorie  $T$ . Buď  $\bar{a}$  prosté očíslování  $\text{dom}(f)$ ,  $l(\bar{a}) = n$ ,  $\chi(x_0, \dots, x_{n-1}, y)$  elementární konjunkce a  $a \in A$  s  $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}, a]$ . Máme najít  $b \in B$  s  $\mathcal{B} \models \chi[f\bar{a}, b]$ . Konjunkty  $\chi$  obsahující  $y$  jsou atomické tvaru  $y = x_i$ ,  $y = c_k$  a jejich negace. Je-li nějaký atomický, je jím  $b$  jednoznačně určeno. Nechť jsou všechny negace atomických. Protože jich je konečně mnoho, najdeme v nekonečné množině  $B$  prvek  $b$ , který je všechny splňuje v  $\mathcal{B}$ .

## A

**Témata.**

Aritmetiky.

**E.5.1. Aritmetiky.****1. Elementární dokazování o numerálech v Presburgerově aritmetice Pr.****a)** Dokažte pro  $m \in \mathbb{N}$ :  $\text{Pr} \vdash \underline{m} = 0 \Leftrightarrow m = 0$ .ŘEŠENÍ. Implikace  $\Leftarrow$  je jasná, neboť  $\underline{0}$  je term  $0$ . Implikace  $\Rightarrow$ . Buď  $\text{Pr} \vdash \underline{m} = 0$ . Z (Q1) plyne:  $\text{Pr} \vdash x = 0 \rightarrow x \neq Sy$ . Tudíž  $\text{Pr} \vdash \underline{m} \neq Sy$ , tedy  $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle \models \underline{m} \neq Sy$  a nutně  $m = 0$ .**b)** Dokažte pro  $m, n \in \mathbb{N}$ :  $\text{Pr} \vdash \underline{m} = \underline{n} \Leftrightarrow m = n$ .ŘEŠENÍ. Implikace  $\Leftarrow$  je jasná. Implikace  $\Rightarrow$ . Buď  $\text{Pr} \vdash \underline{m} = \underline{n}$ . Nechť např.  $m \leq n$ . Pak dle (Q2) je  $\text{Pr} \vdash 0 = \underline{m} - \underline{n}$ , tudíž nutně  $n = m$  díky tomu, že  $\text{Pr} \vdash \underline{k} = 0 \Leftrightarrow k = 0$  pro  $k \in \mathbb{N}$ .**c)** Dokažte pro  $m, n \in \mathbb{N}$ :  $\text{Pr} \vdash \underline{m+n} = \underline{m} + \underline{n}$ .ŘEŠENÍ. Indukcí přes  $n$ . Pro  $n = 0$  máme  $\text{Pr}: \underline{m+0} = \underline{m} = \underline{m} + 0 = \underline{m+0}$  díky (Q3). Indukční krok z  $n$  na  $Sn$ . V Pr máme:  $\underline{m+Sn} = S(\underline{m+n}) = S(\underline{m+n}) = S(\underline{m+n}) = \underline{m+Sn} = \underline{m} + \underline{Sn}$ . V 2. a 5. rovnosti jsme užili  $\text{Pr} \vdash \underline{Sk} = S\underline{k}$  (což plyne ihned z definice numerálu), ve 3. rovnosti indukční předpoklad a ve 4. pak (Q4).**2. Elementární dokazování v Presburgerově aritmetice Pr.****a)** Dokažte  $\text{Pr} \vdash Sx + y = S(x + y)$ .ŘEŠENÍ. Indukcí podle  $y$ .  $Sx + 0 = Sx = S(x + 0)$  dle (Q3). Indukční krok: máme  
$$Sx + Sy = S(Sx + y) = SS(x + y) = S(x + Sy)$$
.

1. rovnost plyne z (Q4), 2. je indukční předpoklad, 3. dle (Q4).

**b)** Dokažte  $\text{Pr} \vdash 0 + x = x + 0$ .ŘEŠENÍ. Indukcí dle  $x$ .  $0 + 0 = 0 + 0$ . Indukční krok: máme  
$$0 + Sx = S(0 + x) = S(x + 0) = Sx = Sx + 0$$
.

1. rovnost plyne z (Q4), 2. dle indukčního předpokladu, 3. dle (Q3), 4. dle (Q3).

**c)** Dokažte  $\text{Pr} \vdash x + y = y + x$ . Předpokládejte, že

$$\text{Pr} \vdash Sx + y = S(x + y), \quad \text{Pr} \vdash 0 + x = x + 0. \quad (*)$$

ŘEŠENÍ. Indukcí dle  $x$ .  $0 + y = y + 0$  platí díky (\*). Indukční krok:  $Sx + y = S(x + y) = S(y + x) = y + Sx$ ; 1. rovnost plyne z (\*), 2. je indukční předpoklad, 3. plyne z (Q4).**d)** Dokažte  $\text{Pr} \vdash (x + y) + z = x + (y + z)$ . Předpokládejte, že

$$\text{Pr} \vdash Sx + y = S(x + y), \quad \text{Pr} \vdash 0 + x = x + 0. \quad (*)$$

ŘEŠENÍ. Indukcí dle  $x$ . Pro  $x = 0$  to platí:  $(0 + y) + z = y + z = 0 + (y + z)$  užitím (\*) a užitím (Q3). Indukční krok:  $(Sx + y) + z = S(x + y) + z = S((x + y) + z) = S(x + (y + z))$ .

1. a 2. rovnost plyne z (\*), 3. z indukčního předpokladu.

**3. Charakteristiky Presburgerovy aritmetiky Pr.****a)** Má Pr algebraický prvomodel? Odpověď zdůvodněte.ŘEŠENÍ. Ano. Je to  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$ . Buď totiž  $\mathcal{A} \models Q$ . Definujme  $h : \mathbb{N} \rightarrow A$  takto:  $h(n) = (\underline{n})^A (= S^A \dots S^A(0^A))$ ,  $S^A$  aplikováno  $n$ -krát). Pak to je vnoření  $\mathcal{B}$  do  $\mathcal{A}$ , neboť  $\text{Pr} \vdash \underline{Sn} = S\underline{n}$ ,  $Q \vdash \underline{m+n} = \underline{m} + \underline{n}$ .

- b) Buď  $\mathcal{A}$  nestandardní model  $\text{Pr}$ ,  $a \in A$  nestandardní prvek  $\mathcal{A}$ ,  $f = \{\langle a + a, a + a + \underline{1} \rangle\}$ .
- Ukažte, že  $f$  je parciální vnoření  $\mathcal{A}$  do sebe.
  - Ukažte, že  $\text{Pr}$  není modelově kompletní.

ŘEŠENÍ.

- Atomická formule  $\psi(x)$  teorie  $\text{Pr}$  jsou totiž ekvivalentní v  $\text{Pr}$  formulí tvaru  $mx = \underline{n}$  s  $m, n$  přirozenými. Odtud je jasné, že  $\mathcal{A} \models \psi[a + a] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[a + a + \underline{1}]$ .
- Platí  $\mathcal{A} \models (\exists y)(y + y = x)[a + a]$ . Avšak  $\mathcal{A} \not\models (\exists y)(y + y = x)[f(a + a)]$ ;  $\text{Pr}$  tedy není koexistenční a tedy nemá eliminaci kvantifikátorů.

#### 4. Charakteristiky Robinsonovy aritmetiky $\text{Q}$ .

- a) Má  $\text{Q}$  algebraický prvomodel? Odpověď zdůvodněte.

ŘEŠENÍ. Ano. Je to standardní model aritmetiky  $\mathcal{N}$ . Buď totiž  $\mathcal{A} \models \text{Q}$ . Definujme  $h : \mathbb{N} \rightarrow A$  takto:  $h(n) = (\underline{n})^A (= S^A \dots S^A(0^A))$ ,  $S^A$  aplikováno  $n$ -krát). Pak to je vnoření  $\mathcal{N}$  do  $\mathcal{A}$ , neboť  $\text{Q} \vdash S\underline{n} = \underline{S}n$ ,  $\text{Q} \vdash \underline{m} \diamond \underline{n} = \underline{m} \diamond n$ , kde  $\diamond$  je  $+$  nebo  $\cdot$  a  $\text{Q} \vdash \underline{m} \leq \underline{n} \Leftrightarrow m \leq n$ .

- b) Je  $\text{Q}$  kompletní teorie? Odpověď zdůvodněte.

ŘEŠENÍ. Ne. V  $\text{Q}$  není např. dokazatelné  $(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x)$ , platí to však v  $\mathcal{N}$ . Buď totiž  $A = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}\{x, y\}$ , kde  $\mathbb{Z}\{x, y\}$  jsou nenulové polynomy v proměnných  $x, y$  nad  $\mathbb{Z}$  s kladnými koeficienty u mocnin s největší sumou exponentů.

Zřejmě je  $A$  uzavřeno na sčítání  $+$  a násobení  $\cdot$  polynomů. Definujme  $S : A \rightarrow A$  tak, že  $S(a) = a + 1$  a relaci  $\preceq \subseteq A^2$  tak, že  $a \preceq b \Leftrightarrow c + a = b$  pro nějaké  $c \in A$ . Pak  $\langle A, S, +, \cdot, 0, \preceq \rangle \models \text{Q}$  a prvky  $x, y$  jsou  $\preceq$ -nesrovnatelné, neboť  $c + x = y \Leftrightarrow c = y - x$  a  $y - x \notin A$ . Tedy  $\text{Q} \not\models x \leq y \vee y \leq x$ .

- c) Je  $\text{Q}$  modelově kompletní? Odpověď zdůvodněte.

ŘEŠENÍ. Ne. Kdyby byla  $\text{Q}$  modelově kompletní, díky existenci algebraického prvomodelu by byla kompletní, to však není (neboť např.  $(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x)$  je její nezávislá sentence).

#### 5. Charakteristiky Peanovy aritmetiky $\text{Q}$ .

Buď  $\mathcal{A} \models \text{P}$ ,  $X \subseteq A$ . Buď

$$\mathcal{A}_{(X)}$$

podstruktura  $\mathcal{A}$ , kde univerzum  $\mathcal{A}_{(X)}$  je množina definovatelných prvků v  $\mathcal{A}$  nad  $X$ , tj.

$$\mathcal{A}_{(X)} = \{a \in A; \{a\} \in \text{Df}^1(X, \mathcal{A})\}.$$

- a) Dokažte:  $\mathcal{A}_{(X)} \prec \mathcal{A}$ .

ŘEŠENÍ.  $\mathcal{A}_{(X)}$  je jasně uzavřeno na funkce struktury  $\mathcal{A}$ ; tedy  $\mathcal{A}_{(X)} \subseteq \mathcal{A}$ . Snadno se dokáže platnost předpokladů Tarski-Vaughtova testu pro  $\mathcal{A}_{(X)}$  a  $\mathcal{A}$ : pro neprázdnou množinu  $D$  z  $\text{Df}^1(\mathcal{A}_{(X)}, \mathcal{A})$  je definován její nejmenší prvek nad  $X$  v  $\mathcal{A}$ , což je prvek z podstruktury  $\mathcal{A}_{(X)}$ , který test požaduje.

- b) Dokažte: Pro  $\mathcal{A} \models \text{P}$  je  $\mathcal{A}_{(\emptyset)}$  prvomodel teorie  $\text{Th}(\mathcal{A})$ .

ŘEŠENÍ. Buď  $\mathcal{A}' \models \text{Th}(\mathcal{A})$ , tj.  $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}$ . Pro  $a \in \mathcal{A}_{(\emptyset)}$  buď  $\varphi(x)$  formule jazyka Peanovy aritmetiky definující  $\{a\}$  v  $\mathcal{A}$ ; pak definuje jisté  $\{a'\}$  v  $\mathcal{A}'$ ; položme  $h(a) = a'$ . Toto  $h$  je korektně definované a je to prosté zobrazení  $\mathcal{A}_{(\emptyset)}$  na  $\mathcal{A}'_{(\emptyset)}$ . Stačí dokázat, že to je vnoření  $\mathcal{A}_{(\emptyset)}$  do  $\mathcal{A}'_{(\emptyset)}$ . Pro  $n$ -ární funkční symbol  $F$  jazyka struktury  $\mathcal{A}$  a  $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$  z  $A^{n+1}$  buď  $F^A(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_n$ ; máme dokázat, že  $F^{A'}(a'_0, \dots, a'_{n-1}) = a'_n$ . Nechť  $\varphi_i(x_i)$  definuje  $\{a_i\}$  v  $\mathcal{A}$ . Pak v  $\mathcal{A}$  platí  $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i(x_i) \rightarrow F(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_n$ ; poslední formule platí i v  $\mathcal{A}'$  a tedy  $F^{A'}(a'_0, \dots, a'_{n-1}) = a'_n$ . Podobně je-li  $R$  relační  $n$ -ární symbol, tak analogicky dostaneme  $R^A(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow R^{A'}(a'_0, \dots, a'_{n-1})$ .