ÚLOHY

U.1 Klasická predikátová logika prvého řádu.

U.1.1 Podobnosti a parciální vnoření.

1. Podobnosti.

a) Buďte $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ a zobrazení $h \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ takové, že $h(2) = 2, h(3) = 6, \mathrm{dom}(h) = \{2, 3\}$.
i) Je h $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$-podobnost?
ii) Najděte $\exists_1$-formuli $\psi(v_0)$ takovou, že $\mathcal{A} \not\models \psi[3]$, $\mathcal{B} \models \psi[h(3)]$.

b) Buďte $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ (modely jazyka bez funkčních symbolů), $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $h(2) = 2, h(3) = 6, \mathrm{dom}(h) = \{2, 3\}$ a $\varphi(v_0, v_1)$ $\exists_1$-formule $(\exists v_2)(v_0 < v_2 \,\&\, v_2 < v_1)$. Pak h je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$-podobnost a $\mathcal{A} \models \neg\varphi[2, 3]$, $\mathcal{B} \models \varphi[h(2), h(3)]$.

c) Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou L-struktury a $h \subseteq A \times B$ je takové zobrazení, že
$$\{F^A(\overline{a});\ \overline{a} \in \mathrm{dom}(h)^{ar(F)}, F \text{ je funkční symbol z } L\} \cap \mathrm{dom}(h) = \emptyset.$$
Je h nějaká $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$-podobnost?

d) Buď $h = \{\langle a, b \rangle\}$ s $a, b \in \mathbb{N}$. Pro právě která $a, b \in \mathbb{N}$ je h $\langle \langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, + \rangle \rangle$-podobnost?

e) Najděte jazyk L s funkčními symboly takový, že $\emptyset$ je parciální vnoření mezi každými dvěma L-strukturami.

f) Buďte $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, \emptyset \rangle$.
i) Je $\emptyset$ nějaká $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$-podobnost či parciální vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$?
ii) Které zobrazení $h \subseteq A \times B$ je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$-podobnost.
iii) Buď $\mathcal{A}' = \langle A', A' \rangle$. Které zobrazení $h \subseteq A \times A'$ je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}' \rangle$-podobnost?

g) Buď dále $L = \langle U \rangle$, kde U je unární relační symbol a T buď L-teorie s axiomatikou „existuje nekonečně prvků“, $(\forall x)U(x) \vee (\forall x)\neg U(x)$.
i) Je T teorie f-homogenní?
ii) Má T eliminaci kvantifikátorů?
iii) Je T kompletní?
iv) Existují právě dvě kompletní L-extenze T_0, T_1 teorie T, a to tvaru $T_i = T + \psi_i$ pro jisté L-sentence ψ_i, $i = 0, 1$. Najděte $\psi_i, i = 0, 1$.
v) Určete $\mathrm{B}^0 T$.
vi) Určete $\mathrm{I}(\omega, T_i)$, $i = 0, 1$.
vii) Existuje algebraický prvomodel teorie T?
viii) Má T nějakou otevřenou axiomatiku?

U.1.2 Konečná a prostá podobnost.

1. Cik-cak systémy pro DiLO a DeLO.

a) Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modely teorie DiLO. i) Najděte $\langle \mathcal{H}_k \rangle_{\mathbb{N}}$ s $\langle \mathcal{H}_k \rangle_{\mathbb{N}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. ii) Ukažte, že pro nějaké modely $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ teorie DiLO není $\mathcal{A} \hookrightarrow_s \mathcal{B}$.

b) Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modely teorie $\mathrm{DeLO}^{0,1}$ (extenze DeLO o „existuje největší prvek“). Ukažte, že $\mathcal{A} \hookrightarrow_s \mathcal{B}$.

2. Nechť T je extenze teorie lineárního uspořádání o axiomy „existuje diskrétně uspořádaná část následovaná hustě uspořádanou částí bez konců“; má tedy modely izomorfní s modely tvaru $\mathcal{A} \dotplus \mathcal{B}$, kde $\mathcal{A} \models \mathrm{DiLO}$, $\mathcal{B} \models \mathrm{DeLO}$. (Názorně: T je „DiLO $\dotplus$ DeLO“.)

a) Popište axiomatiku T užitím zkratky $isol(x)$ (x je izolovaný prvek) za formuli „x má bezprostředního předchůdce i následníka“.

b) Platí pro každé dva modely $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ teorie T vztah $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$?

c) i) Má T eliminaci kvantifikátorů? ii) Má T algebraický prvomodel?

U.1.3 Typy.

Buď Γ množina L-formulí, $\mathcal{A}$ nějaká L-struktura, $e : \mathrm{Var} \to A$. Když $\mathcal{A} \models [e]$ platí pro každé $\varphi \in \Gamma$, říkáme, že e *realizuje* Γ v $\mathcal{A}$ a můžeme psát $\mathcal{A} \models \Gamma[e]$.

n-typ bezesporné L-teorie T je množina Γ tvaru $\Gamma(\overline{v}^n)$ nějakých formulí v n proměnných ($\overline{v}^n = v_0, \ldots, v_{n-1}$), která je *konzistentní s T*, tj. pro každé konečné $\Gamma' \subseteq \Gamma$ je $T \cup (\exists \overline{v}^n)\Gamma'$ konzistentní teorie. Maximální n-typ se nazývá *kompletní*; množina maximálních n-typů teorie T se značí $\mathrm{S}^n T$. Kompletní n-typ Γ teorie T lze jednoznačně identifikovat s ultrafiltrem $\{[\varphi]_{n,T};\, \varphi \in \Gamma\}$ Lindenbaumovy algebry $\mathrm{B}^n T$; $\mathrm{S}^n T$ značí též množinu všech ultrafiltrů algebry $\mathrm{B}^n T$. Jestliže dva n-typy teorie T realizuje v nějakém modelu teorie T táž n-tice, jsou si zřejmě tyto typy rovné.

Platí zřejmě:

1) Každý n-typ teorie T lze rozšířit do kompletního pomocí axiomu výběru.

2) Každá j.k.e. teorie T je ekvivalentní nějakému kompletnímu 0-typu teorie T. Tedy $|\mathrm{S}^0 T|$ je počet navzájem neekvivalentních j.k.e. teorie T.

---

1. Buď T bezesporná teorie.
a) Buď $\Gamma \in \mathrm{S}^n T$. Dokažte: i) Existuje model teorie T realizující Γ. ii) Nechť navíc T je spočetná a nemá konečný model. Pak existuje spočetný model teorie T realizující Γ.
b) Nechť T je spočetná bezesporná teorie nemající konečný model a nechť $|\mathrm{S}^1 T| = 2^\omega$. Dokažte, že $\mathrm{I}(\omega, T) = 2^\omega$.

2. Buď $X \subseteq Prv$ podmnožina množiny Prv prvočísel a
$$\Gamma_X(v_0) = \{(\exists x)(nx = v_0);\, n \in X\} \cup \{\neg(\exists x)(nx = v_0);\, n \in Prv - X\},$$
kde nx je formule $x + x + \cdots + x$, s n sčítanci.
a) Je Γ_X 1-typ některé z teorií Pr, Q, P?
b) Určete $|\mathrm{S}^1 T|$, kde T je Pr, Q, P.

3. Buď T spočetná bezesporná teorie.
a) Ukažte, že je ekvivalentní a) – c):
a) T nemá 1-j.k.e. b) $\mathrm{B}^0 T \cong \mathrm{CA}$. c) $\mathrm{B}^n T \cong \mathrm{CA}$ pro každé $n < \omega$.
b) Nechť T nemá 1-j.k.e.Kolik má j.k.e.až na ekvivalenci teorií?
c) Dokažte, že pro $n \geq 1$ přirozené je ekvivalentní a) a b):
a) T má právě spočetně neekvivalentních j.k.e. a právě n jich není 1-j.k.e.
b) $\mathrm{B}^0 T \cong \mathrm{FA}^m$.

U.1.4 Vlastnosti teorií.

Zdůvodněte nebo vyvraťte údaje uvedené v tabulce.

	Vlastnosti							
Teorie T	Kompletnost	$\mathrm{I}(\omega, T)$	Eliminace kvantif.	$\lvert \mathrm{S}^0 T \rvert$	Rozhodnutelnost	$\mathrm{B}^0 T$	$\mathrm{B}^1 T$	$\lvert \mathrm{S}^1 T \rvert$
LO	n	2^ω	n	2^ω	a			
DeLO	a	1	a	1	a	2	2	1
DeLOc	a	3	a	1	a	2	FA	ω
DiLO	a	2^ω	n	1	a	2	2	1
SC_0	a	ω	n	1	a	2	FA	ω
Pr	a	2^ω	n	1	a	2	Atom. nekon.	2^ω
Q	n	2^ω	n	2^ω	n	CA	CA	2^ω
$\mathrm{VS}(\mathbb{Q}, \infty)$	a	ω	a	1	a	2	2	1
bBA	a	1	a	1	a	2	Atom. nekon.	2^ω
FL	n		n		n			
ACF	n	ω	a	ω	a	FA		
ACF_0	a	ω	a	1	a	2	FA	ω

Poznámka. Atom. nekon. znamená „atomární nekonečná Booleova algebra“.

U.2 Logika druhého řádu.

Symbol $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$ značí jazyk logiky druhého řádu signatury $\mathcal{V}$. Množina všech $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$-formulí resp. všech $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$-sentencí se značí $\mathrm{Fm}_{\mathrm{II},\mathcal{V}}$ resp. $\mathrm{Sent}_{\mathrm{II},\mathcal{V}}$. Symbol $\mathrm{Tr}_{\mathrm{II},\mathcal{V}}$ značí množinu všech pravdivých $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$-sentencí. Sentence $\varepsilon_{fin} \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{II},\emptyset}$ je následující:

$$(\forall X)(((\forall x)(\exists! y)X(x,y) \mathbin{\&} (\forall x,y,z)((X(x,z) \mathbin{\&} X(y,z)) \to x = y)) \to (\forall y)(\exists x)X(x,y)).$$

U.2.1 Varia.

1. „Každou množinu lze dobře uspořádat“ je nezávislá sentence teorie ZF a dokazatelná v ZFC.

a) Najděte sentenci $\varphi_{\mathrm{wo}} \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{II},\emptyset}$ takovou, že pro každou množinu $A \neq \emptyset$ platí (v ZF):
$$\langle A\rangle \models \varphi_{\mathrm{wo}} \Leftrightarrow A \text{ lze dobře uspořádat.}$$

b) Je $\models \varphi_{\mathrm{wo}}$ nezávislá senetence ZF?

c) Existuje sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{II},\emptyset}$ tak, že $\models \varphi$ je nezávislá sentence ZFC?

d) Existuje sentence φ prvého řádu nad signaturou $\mathcal{V} = \emptyset$ tak, že $\models \varphi$ je nezávislá sentence ZFC?

2. Symbol $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}$ značí množinu všech pravdivých $\mathcal{V}$-sentencí prvého řádu.

a) Jak je složitá množina $\mathrm{Tr}_{\mathrm{II},\emptyset}$?

b) Buď $\mathcal{V}$ konečná signatura. Porovnejte složitost $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}$ resp. $\mathrm{Tr}_{\mathrm{II},\mathcal{V}}$.

3. Třídy izomorfních spočetných modelů teorie SC_0.

a) Ukažte, že $\mathrm{I}(\omega, \mathrm{SC}_0) = \omega$. Užijte ekvivalenci $\sim_A$ na univerzu A modelu $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}_0$, definovanou takto: $a \sim_A b \Leftrightarrow a, b$ jsou S-sdružené, tj. $(\mathrm{S}^A)^n a = b$ nebo $(\mathrm{S}^A)^n b = a$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

b) Existuje pro každou třídu K všech spočetných navzájem izomorfních modelů teorie SC_0 množina $\Psi_K \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathrm{II},\mathcal{V}^{\mathrm{SC}_0}}$ tak, že pro každý model $\mathcal{A} \models \mathrm{SC}_0$ je $\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \Psi_K$?

U.2.2 Slabá logika druhého řádu.

1. *Slabá logika druhého řádu* má pro každou signaturu $\mathcal{V}$ jazyk $L_{\mathrm{wII}}^{\mathcal{V}}$ rovný $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$ a definici platnosti $\models_{\mathrm{w}}$ jako v logice druhého řádu, změněnou však pro $(\forall X)$ s n-ární relační proměnnou X takto:
$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{w}} (\forall X)\varphi[e] \Leftrightarrow \text{pro každou konečnou } R \subseteq A^n \text{ je } \mathcal{A} \models_{\mathrm{w}} \varphi[e(X/R)].$$
Symbol $\mathcal{L}_{\mathrm{wII}}$ značí odpovídající logický systém.

a) Nechť ε_{fin}^{w} je $L_{\mathrm{II}}^{\emptyset}$-formule $(\exists X)(\forall x)X(x)$, $A \neq \emptyset$. Doplňte podmínku na A, aby platila $\Leftrightarrow$:

$\langle A\rangle \models \varepsilon_{fin} \quad \Leftrightarrow A$	$\langle A\rangle \models \varepsilon_{fin}^{w} \quad \Leftrightarrow A$
$\langle A\rangle \models_{\mathrm{w}} \varepsilon_{fin} \Leftrightarrow A$	$\langle A\rangle \models_{\mathrm{w}} \varepsilon_{fin}^{w} \Leftrightarrow A$

b) Najděte pro každou $L_{\mathrm{wII}}^{\mathcal{V}}$-sentenci φ nějakou $L_{\mathrm{II}}^{\mathcal{V}}$-sentenci φ^* tak, že pro každou $\mathcal{V}$-strukturu $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A} \models_{\mathrm{w}} \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*$.

c) Je logický systém $\mathcal{L}_{\mathrm{wII}}$ kompaktní?

d) Buď $\mathcal{V}$ konečná signatura, obsahující binární symbol. Je množina $\mathrm{Tr}_{\mathrm{wII},\mathcal{V}}$ r.s.? *Návod.* Využijte Trachtenbrotovu větu: *Pro jazyk L konečné signatury s binárním relačním nebo funkčním symbolem není* $\mathrm{f}L$ *r.s. axiomatizovatelná, kde* $\mathrm{f}L$ *je množina všech L-sentencí, platících v každé konečné L-struktuře.*

U.3 Infinitární logika $L_{\omega_1\omega}$.

U.3.1

Značení. Symbol $\varepsilon_{fin}^{\infty}$ značí $L_{\omega_1\omega}^{\emptyset}$-sentenci $\bigvee\{\varepsilon_{\leq n};\ 0 < n < \omega\}$.

Symbol $\alpha_{\mathcal{A}}^{\sigma}$ resp. $\sigma_{\mathcal{A}}$ značí Scottovu výšku resp. formuli struktury $\mathcal{A}$. Uveďme, že zřejmě $\mathcal{A} \models \sigma_{\overline{a}}^{0}[\overline{b}] \Leftrightarrow \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_{\mathrm{AFm}} \mathcal{A}, \overline{b}$ jakmile $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$.

Pojem jednoduché extenze teorie je týž, jako v klasické logice prvého řádu. *Prvořádovým* pojmem je míněn pojem v rámci klasické predikátové logiky prvého řádu. Říkáme tak např. prvořádová teorie (kompletní teorie, j.k.e.) apod.

---

1. Scottova výška $\alpha_{\mathcal{A}}^{\sigma}$.

a) Buď $0 < n \in \mathbb{N}$. i) Určete $\alpha_{\langle n \rangle}^{\sigma}$. ii) Určete $\alpha_{\langle n, \leq \rangle}^{\sigma}$; $\langle n, \leq \rangle$ značí obvyklé uspořádání čísla n.

b) Buď $\mathcal{A}_n = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle \dot{+} \langle n, \leq \rangle$ pro $n \in \mathbb{N}$. Určete $\alpha_{\mathcal{A}_n}^{\sigma}$.

c) Určete i) $\alpha_{\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle}^{\sigma}$, ii) $\alpha_{\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \dot{+} \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle}^{\sigma}$.

d) Buď $\mathcal{A}_n$ zúžení $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ na $(-\infty, 0) \cup \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Určete $\alpha_{\mathcal{A}_n}^{\sigma}$.

e) Pro ordinální číslo α je $\langle \alpha, \leq \rangle$ kanonické uspořádání ordinálu α. Ukažte, že pro α nekonečné limitní je $\alpha_{\langle \alpha, \leq \rangle}^{\sigma} = \alpha$ a pro α nekonečné tvaru $\beta + 1$ je $\alpha_{\langle \alpha, \leq \rangle}^{\sigma} = \beta$.

2. O slabé logice druhého řádu $\mathcal{L}_{\mathrm{wII}}$.

a) Ukažte, že pro každou $L_{\mathrm{wII}}^{\mathcal{V}}$-sentenci φ existuje $L_{\omega_1\omega}^{\mathcal{V}}$-sentence φ^* tak, že pro každou $L^{\mathcal{V}}$-strukturu $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A} \models_{\mathrm{w}} \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*$.

b) Je logický systém $\mathcal{L}_{\mathrm{wII}}$ löwenheim-skolemovský?

3. Písmeno $\mathbb{X}$ zde značí kanonické uspořádání $\langle \mathbb{X}, \leq \rangle$, kde $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$. Mezi uvedená uspořádání vepište platné vztahy ze seznamu $\equiv$, $\not\equiv$, $\equiv_{L_{\omega_1\omega}}$, $\not\equiv_{L_{\omega_1\omega}}$ a zdůvodněte je.

a)

i)	$\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Z}$		$\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$
ii)	$\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Q}$		$\mathbb{Z} \dot{+} (\mathbb{Q} \dot{+} \mathbb{Q})$		$(\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Q}) \dot{+} \mathbb{Q}$

b)

i)	$\mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R}$		$\mathbb{R}$		$\mathbb{Q}$
ii)	$\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{R}$		$\mathbb{Z} \dot{+} (\mathbb{Q} \dot{+} \mathbb{Q})$		$(\mathbb{Z} \dot{+} \mathbb{Z}) \dot{+} \mathbb{Q}$

4. O kompletních teoriích v $L_{\omega_1\omega}$.

a) O každé z uvedených teorií určete, zda je kompletní v logice $L_{\omega_1\omega}$. (SA je standardní aritmetika, tj. teorie standardního modelu $\underline{\mathbb{N}}$ přirozených čísel, VS($\mathbb{Q}$) je teorie (nekonečných) vektorových prostorů nad tělesem racionálních čísel.)

DeLO	DiLO	SC_0	Pr	SA	aBA	bBA	VS($\mathbb{Q}$)	RGh

b) Buď $L = \langle U \rangle$, kde U je unární relační symbol, T buď L-teorie s axiomatikou „existuje nekonečně prvků“.
   i) Je každá prvořádová jednoduchá kompletní extenze (j.k.e.) teorie T kompletní v $L_{\omega_1\omega}$?
   ii) Uveďte axiomatiku každé j.k.e. teorie T v $L_{\omega_1\omega}$.

c) i) Kolik j.k.e. v $L_{\omega_1\omega}$ má teorie DiLO?
   ii) Kolik j.k.e. v $L_{\omega_1\omega}$ má teorie SC_0?

d) i) Existuje prvořádová spočetná kompletní teorie, která má právě 2 j.k.e. v $L_{\omega_1\omega}$?
   ii) Existuje prvořádová spočetná kompletní teorie, která má právě 3 j.k.e. v $L_{\omega_1\omega}$?