Příklady z logiky – 4

1. Logicky pravdivé formule z předchozího cvičení dokažte (bez použití věty o úplnosti predikátové logiky).

2. Mějme teorii s jedním binárním predikátem P a s dvěma axiomy $(\forall x)\neg P(x,x)$ a $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \mathbin{\&} P(y,z) \to P(x,z))$. Rozhodněte, zda v této teorii platí následující formule, případně je dokažte (bez použití věty o úplnosti predikátové logiky).

   $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \to \neg P(y,x)$

   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \mathbin{\&} P(y,z) \to (x = y \vee y = z))$

   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \mathbin{\&} P(y,z) \to (x = y \vee y = z) \to \neg(\exists x)(\exists y)(\exists z)(P(x,y) \mathbin{\&} P(y,z))$

3. Mějme binární predikát Q a následující formule:

   $A:\quad \neg(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Q(x,y) \mathbin{\&} Q(y,z))$

   $B:\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x,y) \mathbin{\&} Q(y,z) \to (x = y \vee y = z)$

   $C:\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x,y) \mathbin{\&} Q(y,z) \to Q(x,z))$

   Rozhodněte a případně dokažte, zda C vyplývá z A, zda C vyplývá z B, zda A vyplývá z B a zda B vyplývá z A.

4. Dokažte (bez použití věty o úplnosti predikátové logiky) nebo vyvraťte (pomocí nějaké realizace):

   $(\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$

   $(\forall x)(A(x,z) \to B(x,y)) \to ((\forall x)A(x,z) \to (\forall x)B(x,y))$

   $(\forall x)(\exists y)A(x,y,z) \to (\exists y)(\forall x)A(x,y,z)$

   $(\forall x)(A \to B(x)) \to (A \to (\forall x)B(x))$

   $(\forall x)(A(x,y) \mathbin{\&} B(x,y)) \to ((\forall x)A(x,y) \mathbin{\&} (\forall x)B(x,y))$

   $(\forall x)(A(x,y) \to B(x,y)) \to ((\forall x)A(x,y) \to (\forall x)B(x,y))$

   $(\exists x)(A(x) \to B(x)) \to ((\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x))$

   $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \to ((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x))$

   $(\forall x)(\exists y)(A(x) \to B(y)) \to (\exists y)(\forall x)(A(x) \to B(y))$

   $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

   $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(y,x)$