Příklady z logiky – 5

1. Převeďte na prenexní normální tvar:

   $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(x,y) \to \neg(\forall z)R(y,z)))$

   $(\exists x)A(x,y) \to (B(x) \to \neg(\exists u)A(x,u))$

   $P(x,y) \to (\exists y)(Q(y) \to (\exists x)Q(x) \to R(y)))$

   $(\forall x)((\forall y)(y < x \to P(y)) \to P(x)) \to (\forall x)P(x)$

   $(\exists x)P(x) \to (\exists x)(P(x) \ \& \ (\forall y)(y < x \to \neg P(y)))$

   $(\forall x)(\exists y)(x > 5 \to y > x) \ \& \ (\exists y)(x > 5 \to y > x) \leftrightarrow (\exists y)(y > x \ \& \ (\forall x)(x > 5))$

   $(\forall x)(\forall y)((\exists z)z > 0 \to (x + y = z \ \& \ (\exists c)x - y = z - c))$

   $((\forall x)(A(x) \to (\exists x)B(x)) \to (\forall x)(A(x) \ \& \ (\forall x)\neg B(x))$

   $(\forall x)x > 0 \ \& \ (\exists y)y > x$

   $(\exists z)z = x + y \to (\forall a)a < z$

   $((\forall x)x > 0 \ \& \ (\exists y)y > x) \vee ((\exists z)z = x + y \to (\forall a)a < z)$

2. Dokažte

   $(\forall x)(\exists y)((P(x,x) \ \& \ P(y,y)) \to P(x,y)) \to (\forall y)(\neg(\forall x)(P(x,x) \ \& \ \neg P(y,x)) \ \& \ P(y,y))$

3. Častý problém:

   Dokažte nebo vyvraťte:

   $A(x) \vdash (\forall x)A(x)$

   $\vdash A(x) \to (\forall x)A(x)$

   $A(x) \to B(x) \vdash (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$

   $\vdash (A(x) \to B(x)) \to ((\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x))$

4. Příprava na zkoušku:

   Nechť jsou T a S teorie, A a B formule. Dokažte:

   Je-li $T \subset S$ a $T \vdash A$, potom $S \vdash A$.

   $T \vdash A$ právě když pro nějakou konečnou podmnožinu $S \subset T$ platí $S \vdash A$.

   Je-li $T \vdash C$ pro každou formuli C z množiny S a je-li $S \vdash A$, potom $T \vdash A$.

   Je-li S množina všech uzávěrů formulí z T, potom $T \vdash A$, právě když $S \vdash A$.

   Je-li $T \vdash A$ a $T \vdash A \to B$, potom $T \vdash B$.